Esercizio sulla skolemizzazione

Vincenzo Manzoni

8 luglio 2006

Testo

Trasformare la seguente formula ben formata in forma di Skolem.

$$\forall x \forall y (\exists x A(x,y) \rightarrow B(x,y)) \wedge \exists y (\forall x C(x,y) \wedge B(x,y))$$

Soluzione

Per prima cosa, bisogna portare la formula ben formata in *forma normale prenessa*. Per prima cosa, determino le variabili libere e vincolate e cambio loro il nome in accordo con il quantificatore che le vincola.

$$\forall x_1 \forall y_1 (\exists x_2 A(x_2,y_1) \rightarrow B(x_1,y_1)) \wedge \exists y_2 (\forall x_3 C(x_3,y_2) \wedge B(x_4,y_2))$$

Se esistono varibili libere, le *chiudo* (vincolo) con un quantificatore universale. Nel nostro esercizio, x_4 è l'unica variabile libera e la formula ben formata si trasforma nella seguente.

$$\forall x_4 (\forall x_1 \forall y_1 (\exists x_2 A(x_2,y_1) \rightarrow B(x_1,y_1)) \wedge \exists y_2 (\forall x_3 C(x_3,y_2) \wedge B(x_4,y_2)))$$

All'interno di $\forall x_4(\ldots)$ il connettivo principale è $\wedge$, quindi applico la regola $Q_1 x P(x) \wedge Q_2 y R(y) = Q_1 x Q_2 y (P(x) \wedge R(y))$.

$$\forall x_4 \forall x_1 \forall y_1 \exists y_2 ((\exists x_2 A(x_2,y_1) \rightarrow B(x_1,y_1)) \wedge (\forall x_3 C(x_3,y_2) \wedge B(x_4,y_2)))$$

Ora devo spostare gli ultimi quantificatori.

$$\forall x_4 \forall x_1 \forall y_1 \exists y_2 (\forall x_2 (A(x_2,y_1) \rightarrow B(x_1,y_1)) \wedge \forall x_3 (C(x_3,y_2) \wedge B(x_4,y_2)))$$

Che, applicando la regola del and logico vista poco sopra diventa la seguente.

$$\forall x_4 \forall x_1 \forall y_1 \exists y_2 \forall x_2 \forall x_3 ((A(x_2,y_1) \rightarrow B(x_1,y_1)) \wedge (C(x_3,y_2) \wedge B(x_4,y_2)))$$

Ora la nostra formula ben formata è in forma normale prenessa. Non resta che procedere con la skolemizzazione. Ricordo che si possono sostituire le variabili vincolate da quantificatori esistenziali con una costante nel caso che il quantificatore esistenziale non sia nel campo di azione di uno o più quantificatori universali. Nel caso invece che il quantificatore esistenziale sia nel campo di azione di uno o più quantificatori universali $\forall x_1 \cdots \forall x_n$, le variabili vincolate dal quantificatore esistenziali si sostituiscono con un simbolo di funzione, di arità n, nelle varibili $x_1, \cdots, x_n$. Esempio:

$$\begin{array}{ll} \exists x_3 \forall x_1 \forall x_2 A(x_1, x_{2,} x_3) & \forall x_1 \forall x_2 A(x_1, x_{2,} c) \\ \forall x_1 \exists x_3 \forall x_2 A(x_1, x_{2,} x_3) & \forall x_1 \forall x_2 A(x_1, x_{2,} f(x_1)) \end{array}$$

La nostra formula ben formata, skolemizzata, è la seguente.

$$\forall x_4 \forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall x_3((A(x_2, y_1) \rightarrow B(x_1, y_1)) \wedge (C(x_3, f(x_1, x_4, y_1)) \wedge B(x_4, f(x_1, x_4, y_1))))$$