

La verifica delle ipotesi

Se abbiamo un'idea di quale possa essere il valore di un parametro incognito possiamo sottoporlo ad una verifica, che sulla base di un risultato campionario, ci permetta di decidere se accettare o rifiutare l'ipotesi fatta

Test d'ipotesi per la media

Supponiamo di avere un modello Gaussiano X di media μ incognita e varianza nota σ^2 . Ci proponiamo di sottoporre a verifica l'ipotesi (statistica) che il vero valore incognito della media sia μ_0

Questa ipotesi si indica

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

e viene detta *ipotesi nulla*

Un test conduce sempre a due sole alternative: o *rifiutiamo* l'ipotesi nulla H_0 , oppure la accettiamo (ovvero *non la rifiutiamo*)

Tale decisione avviene sulla base dell'osservazione di un campione di v.c. i.i.d come X

Poiché la decisione si basa su un campione c'è la possibilità di commettere errori che possono essere di due tipi riassunti nella tabella

	Rifiuto H_0	Non Rifiuto H_0
è vera H_0	errore I° tipo α	nessun errore $1 - \alpha$
è falsa H_0	nessun errore $1 - \beta$	errore di II° tipo β

Abbiamo quindi

$$\alpha = P(\text{rifiutare } H_0 | H_0 \text{ è vera})$$

$$\beta = P(\text{non rifiutare } H_0 | H_0 \text{ è falsa})$$

Osserveremo dei valori \bar{x}_n che sono diversi da μ_0 . Una procedura di test si occuperà di valutare se la distanza tra \bar{x}_n e μ_0 è poco o molto elevata. Passando alle variabili aleatorie, il test si occuperà di verificare che la distanza tra \bar{X}_n e μ_0 non sia troppo elevata (in probabilità).

Per decidere quando rifiutare H_0 dobbiamo specificare l'ipotesi alternativa H_1 che può essere di tipo differente. Un primo caso riguarda l'ipotesi alternativa *bilaterale*

Questa ipotesi si indica

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

La regola che possiamo introdurre è del tipo:

se $|\bar{X}_n - \mu_0|$ è maggiore di un certo valore k rifiutiamo l'ipotesi nulla $H_0 : \mu = \mu_0$ in favore dell'ipotesi *alternativa* $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Come trovare il valore k ?

Fissiamo il valore di α in modo da garantirci che con quella scelta di k al massimo commetteremo un errore di primo tipo pari ad α

Allora il valore di k è tale da soddisfare

$$P(|\bar{X}_n - \mu_0| > k | H_0 \text{ vera}) = \alpha$$

Il valore $k = k_\alpha$ viene detto *soglia del test*

Come si calcola?

Quando è vera H_0 allora

$$\bar{X}_n \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$$

e

$$\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Da cui

$$\begin{aligned} \alpha &= P(|\bar{X}_n - \mu_0| > k | H_0) = P\left(\left|\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > \frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \mid H_0\right) \\ &= P\left(|Z| > \frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z < -\frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ e } Z > \frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \end{aligned}$$

Per la simmetria di Z il valore k è tale

$$\frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{cioè} \quad k = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Ricapitoliamo: Indichiamo con Z la *statistica test*

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Supponiamo che per un dato campione otteniamo come valore z di Z

$$z = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Il test ci dice di rifiutare l'ipotesi nulla

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

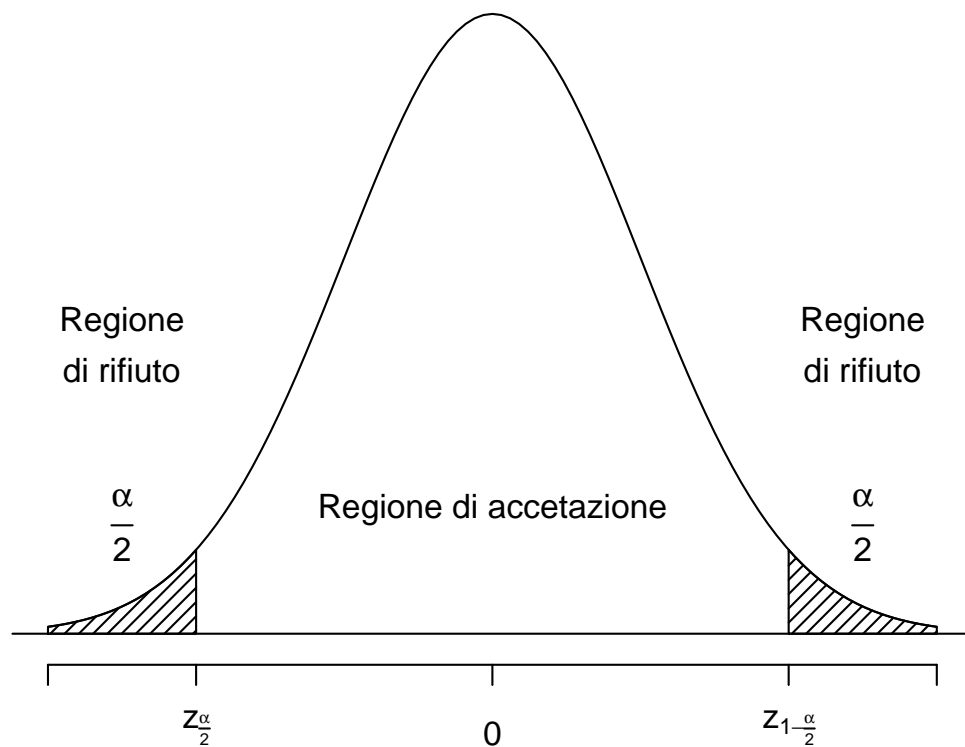
in favore di

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

se z cade all'esterno (*zona di rifiuto*) dell'intervallo

$$\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

chiamato *zona di accettazione* del test.



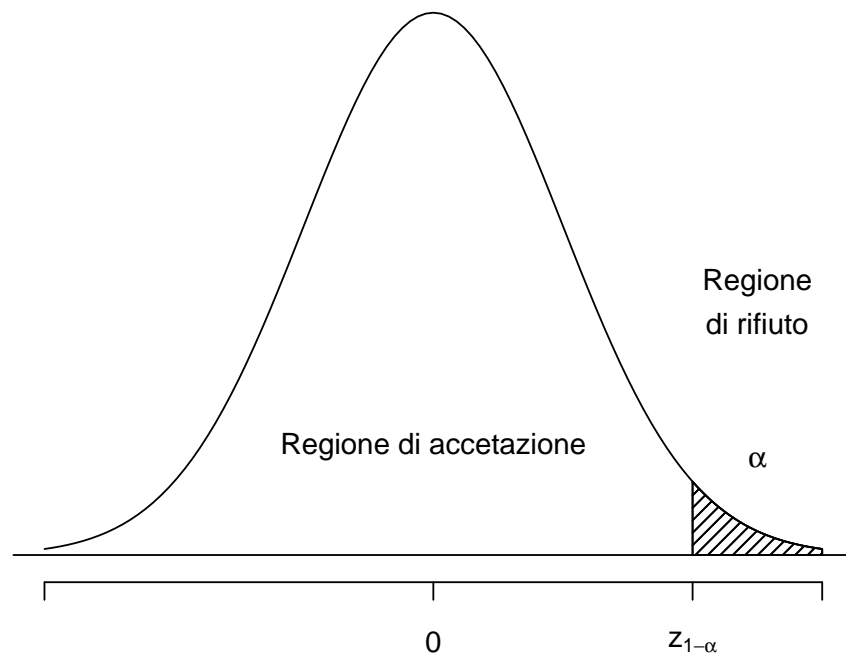
Vi possono essere altri due tipi di ipotesi alternativa. Vediamo cosa accade ad un test con ipotesi nulla

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

contro l'alternativa (unilaterale)

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\alpha = P(\bar{X}_n - \mu_0 > k | H_0) = P\left(Z > \frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$



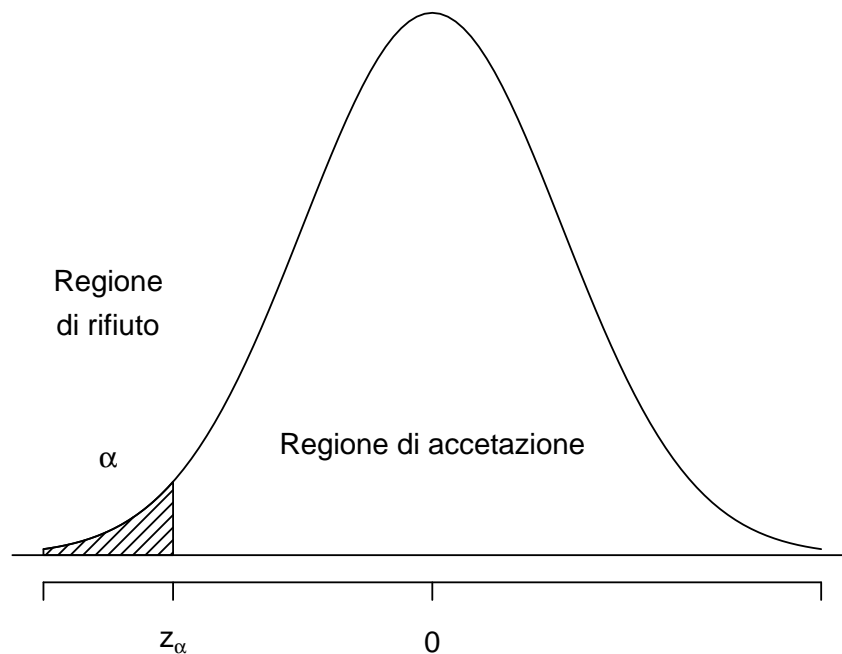
Il test rifiuterà l'ipotesi nulla se

$$z = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha}$$

Analogamente, se l'ipotesi alternativa è

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

il test rifiuterà per valori di z troppo piccoli e in particolare quando $z < z_\alpha$



Riassumiamo ora quanto segue in un unico schema

Test sulla media (σ^2 nota)

Sia X una variabile casuale normale di media incognita μ e varianza σ^2 nota. Se X_1, X_2, \dots, X_n è un campione i.i.d. estratto da X allora il test di livello α , per la verifica di ipotesi del tipo $H_0 : \mu = \mu_0$, ha la seguente forma a seconda delle alternative:

quando $H_1 : \mu \neq \mu_0$, Rifiutare H_0 se $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

quando $H_1 : \mu > \mu_0$, Rifiutare H_0 se $z > z_{1-\alpha}$

quando $H_1 : \mu < \mu_0$, Rifiutare H_0 se $z < z_\alpha$

dove

$$z = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Esempio: un ingegnere deve studiare la resistenza alla compressione del cemento. Dall'estrazione di un campione casuale di 12 esemplari è risultata una resistenza media pari a $\bar{x} = 3255.42$. Ipotizzando che la resistenza alla compressione sia una variabile casuale distribuita come una Normale con media μ ignota e varianza $\sigma^2 = 1000 \text{ psi}^2$,

- a) verificare l'ipotesi nulla $H_0 : \mu = 3300$, contro l'alternativa $H_1 : \mu < 3300$, utilizzando $\alpha = 0.02$
- b) verificare l'ipotesi nulla $H_0 : \mu = 3250$, contro l'alternativa $H_1 : \mu \neq 3250$, utilizzando $\alpha = 0.01$

a) Abbiamo

$$z = \frac{3255.42 - 3300}{\sqrt{1000/12}} = -4.883494$$

Mentre

$$z_{1-\alpha} = z_{0.80} = -2.053749$$

Quindi rifiutiamo l'ipotesi nulla

b) Abbiamo

$$z = \frac{3255.42 - 3250}{\sqrt{1000/12}} = 0.5937313$$

Mentre

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.575829$$

Quindi accettiamo l'ipotesi nulla

Test sulla media (σ^2 incognita)

Supponiamo di avere un modello Gaussiano X di media μ e varianza σ^2 incognite. Ci proponiamo di sottoporre a verifica l'ipotesi (statistica) che il vero valore incognito della media sia μ_0

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

contro l'alternativa

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Come nel caso in cui σ è nota rifiutiamo l'ipotesi nulla $H_0 : \mu = \mu_0$ in favore dell'ipotesi *alternativa* $H_1 : \mu \neq \mu_0$ se $|\bar{X}_n - \mu_0|$ è maggiore di un certo valore k

Fissiamo il valore di α in modo da garantirci che con quella scelta di k al massimo commetteremo un errore di primo tipo pari ad α

Allora il valore di k è tale da soddisfare

$$P(|\bar{X}_n - \mu_0| > k | H_0 \text{ vera}) = \alpha$$

Quando è vera H_0 allora

$$\bar{X}_n \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$$

ma

$$\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim T^{n-1}$$

Da cui

$$\begin{aligned} \alpha &= P(|\bar{X}_n - \mu_0| > k | H_0) = P\left(\left|\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}\right| > \frac{k}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \mid H_0\right) \\ &= P\left(T^{n-1} < -\frac{k}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \text{ e } T^{n-1} > \frac{k}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}\right) \end{aligned}$$

Il test ci dice di rifiutare l'ipotesi nulla H_0 in favore di H_1 se

$$t = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

cade all'esterno (*zona di rifiuto*) dell'intervallo

$$\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\right)$$

chiamato *zona di accettazione* del test

Ricapitolando:

Se la varianza non è nota, si procede sostituendo al valore σ^2 la sua stima \bar{s}_n^2 e utilizzando le tavole della t di Student.

Se i dati non sono distribuiti in modo gaussiano e l'ampiezza campionaria è elevata si usa la tecnica appena vista basata sulla statistica t ma per i valori soglia si ricorre alle tavole della Normale.

Test sulla media (σ^2 incognita)

Sia X una variabile casuale Normale di media incognita μ e varianza σ^2 non nota. Se X_1, X_2, \dots, X_n è un campione i.i.d. estratto da X allora il test di livello α , per la verifica di ipotesi del tipo $H_0 : \mu = \mu_0$, ha la seguente forma a seconda delle alternative:

quando $H_1 : \mu \neq \mu_0$, Rifiutare H_0 se $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}$

quando $H_1 : \mu > \mu_0$, Rifiutare H_0 se $t > t_{1-\alpha}^{n-1}$

quando $H_1 : \mu < \mu_0$, Rifiutare H_0 se $t < t_{\alpha}^{n-1}$

dove

$$t = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\frac{\bar{s}_n}{\sqrt{n}}} \quad \text{e} \quad \bar{s}_n = \sqrt{\bar{s}_n^2}$$

Verifica di ipotesi sulle proporzioni

Sia X una variabile casuale di Bernoulli di parametro p incognito. Vogliamo sottoporre ad ipotesi $H_0 : p = p_0$ contro un'alternativa $H_1 : p \neq p_0$. Misureremo la distanza sempre con $|\hat{p}_n - p_0|$ e per trovare il valore soglia scriveremo quanto segue

$$\alpha = P(|\hat{p}_n - p_0| > k | H_0)$$

da cui

$$\begin{aligned} \alpha &= P(|\hat{p}_n - p_0| > k | H_0) \\ &= P\left(\left|\frac{\hat{p}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right| > \frac{k}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right) \\ &\simeq P\left(|Z| > \frac{k}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right) \end{aligned}$$

L'unica differenza, rispetto anche agli intervalli di confidenza, è che se risulta vera H_0 allora $p = p_0$ e non abbiamo bisogno di utilizzare \hat{p}_n per standardizzare la differenza $\hat{p}_n - p_0$

Ricapitolando:

Test sulla proporzione

Sia X una variabile casuale di Bernoulli di parametro p incognito. Se X_1, X_2, \dots, X_n è un campione i.i.d. estratto da X allora il test di livello α , per la verifica di ipotesi del tipo $H_0 : p = p_0$, ha la seguente forma a seconda delle alternative:

quando $H_1 : p \neq p_0$, Rifiutare H_0 se $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

quando $H_1 : p > p_0$, Rifiutare H_0 se $z > z_{1-\alpha}$

quando $H_1 : p < p_0$, Rifiutare H_0 se $z < z_\alpha$

dove

$$z = \frac{\hat{p}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Attenzione! : il test si può eseguire solo se $n > 30$. Inoltre, nel denominatore di z si utilizza p_0 e non \hat{p}_n per la standardizzazione.

Verifica di ipotesi per due campioni

Quando abbiamo due insiemi di dati possiamo chiederci, a seconda della loro natura, se i campioni sono simili oppure no. I problemi che affrontiamo in questo contesto sono due.

- **Test per il confronto tra proporzioni**

Abbiamo due campioni di ampiezza n_1 e n_2 su cui abbiamo rilevato una proporzione di successi $\hat{p}_1 = x_1/n_1$ e $\hat{p}_2 = x_2/n_2$. Ci chiediamo se l'eventuale differenza riscontrare tra \hat{p}_1 e \hat{p}_2 sia dovuta al caso oppure no.

L'ipotesi nulla da sottoporre a test è

$$H_0 : p_1 = p_2$$

contro un'alternativa che può essere

$$H_1 : p_1 \neq p_2$$

per un test a due code, oppure

$$H_1 : p_1 > p_2$$

o

$$H_1 : p_1 < p_2$$

per un test ad una coda

La statistica test viene costruita come segue: si pone

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \sim N(0, 1)$$

Le regole per decidere se accettare l'ipotesi nulla sono riassunte nella tabella

Test per il confronto tra proporzioni

Se $\hat{p}_1 = x_1/n_1$ e $\hat{p}_2 = x_2/n_2$ sono le proporzioni di successo su due campioni di ampiezza n_1 ed n_2 rispettivamente, si può costruire un test z per testare l'ipotesi nulla $H_0 : p_1 = p_2$ contro le usuali alternative come segue:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

con $\hat{p} = (x_1 + x_2)/(n_1 + n_2)$. Il test di livello α corrisponde alle seguenti regole di decisione

quando $H_1 : p_1 \neq p_2$, Rifiutare H_0 se $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

quando $H_1 : p_1 > p_2$, Rifiutare H_0 se $z > z_{1-\alpha}$

quando $H_1 : p_1 < p_2$, Rifiutare H_0 se $z < z_\alpha$

Esempio: da un insieme di 22071 medici volontari vennero formati due gruppi: il gruppo di trattamento e quello di controllo. Gli individui del gruppo di trattamento ricevevano una dose quotidiana di aspirina mentre quelli di controllo un farmaco *placebo*. Lo studio venne condotto per un periodo di 5 anni osservando il numero di decessi per infarto. Si ottennero i seguenti risultati:

Farmaco	Esito	Infartuati	Non Infartuati	Totali
Placebo		239	10795	11034
Aspirina		139	10898	11037
		378	21693	22071

Verificare l'ipotesi nulla che la proporzione dei colpiti da infarto sia uguale nei due gruppi contro l'alternativa che sia maggiore nel gruppo di controllo.

Sia 1 il gruppo di controllo e 2 il gruppo dei trattati.
Abbiamo

$$\hat{p}_1 = \frac{239}{11034} = 0.0217 \quad \text{e} \quad \hat{p}_2 = \frac{139}{11037} = 0.0126$$

E quindi

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{378}{22071} = 0.0171$$

Il valore della statistica z

$$\begin{aligned} z &= \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \\ &= \frac{0.0217 - 0.0126}{\sqrt{0.0171 \cdot (1 - 0.0171) \left(\frac{1}{11034} + \frac{1}{11037} \right)}} \\ &= \frac{0.0091}{0.00175} \\ &= 5.2 \end{aligned}$$

Confrontiamo $z = 5.2$ con il quantile $z_{1-\alpha} = z_{0.99} = 2.33$. Poiché $z > z_{1-\alpha}$ il test rifiuta l'ipotesi nulla e gli sperimentatori concluderanno che vi è un effetto protettivo del principio attivo contenuto nell'aspirina rispetto al rischio di infarto cardiaco

- **Test per il confronto tra medie**

Vogliamo valutare la differenza tra le medie in due campioni. Siano \bar{x}_1 e \bar{x}_2 le medie di due gruppi di ampiezza n_1 ed n_2 . Si costruisce la statistica t per verificare l'uguaglianza delle medie come segue

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\bar{s} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

dove

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\bar{s}_1^2 + (n_2 - 1)\bar{s}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

con \bar{s}_1^2 e \bar{s}_2^2 le varianze campionarie dei due campioni. Questa statistica test t si distribuisce come una t di Student con $n_1 + n_2 - 2$ gradi di libertà. Si procederà ad effettuare un test come nel caso di un qualsiasi test t dove però si deve tener conto dei differenti gradi di libertà.

Le regole per accettare l'ipotesi nulla a seconda dell'ipotesi alternativa sono riassunte nella seguente tabella:

Test per il confronto tra medie

Se \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{s}_1^2 e \bar{s}_2^2 sono le medie e le varianze campionarie di due campioni di ampiezza n_1 ed n_2 , si può costruire un test t per verificare l'ipotesi nulla $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contro le usuali alternative come segue:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\bar{s} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

dove

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\bar{s}_1^2 + (n_2 - 1)\bar{s}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Il test di livello α corrisponde alle seguenti regole di decisione

quando $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, Rifiutare H_0 se $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^g$

quando $H_1 : \mu_1 > \mu_2$, Rifiutare H_0 se $t > t_{1-\alpha}^g$

quando $H_1 : \mu_1 < \mu_2$, Rifiutare H_0 se $t < t_{\alpha}^g$

con $g = n_1 + n_2 - 2$.