

La variabile casuale Binomiale

Si costruisce a partire dalla nozione di esperimento casuale Bernoulliano che consiste in un insieme di *prove ripetute* con le seguenti caratteristiche:

- i) ad ogni singola prova si hanno solo 2 esiti possibili, chiamati “successo” ed “insuccesso”
- ii) la probabilità dell’evento che dà origine al “successo” è costante
- iii) i risultati delle prove sono indipendenti

La v.c. che descrive ogni singola prova, è la v.c. di **Bernoulli**

$$X = \begin{cases} 1 & P(X = 1) = p \\ 0 & P(X = 0) = 1 - p \end{cases} \quad 0 < p < 1$$

Si scrive anche $X \sim \text{Ber}(p)$

Abbiamo che

$$E(X) = p \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = p(1 - p)$$

In genere si è interessati a sapere quante volte si ottiene un successo su n prove, cioè si è interessati a conoscere la probabilità con cui si ottengono un certo numero k di successi su n

Ad esempio con quale probabilità possiamo ottenere 2 successi (T) nel lancio di una moneta 6 volte?

Sia X_i la variabile di Bernoulli che vale 1, con probabilità p , se alla prova numero i otteniamo un successo ($p = \frac{1}{2}$)

La due sequenze di lanci

1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0

hanno la stessa probabilità di verificarsi

$$\begin{aligned}
 P(1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0) &= P(X_1=1, X_2=1, X_3=0, \\
 &\quad X_4=0, X_5=0, X_6=0) \\
 &= P(X_1=1) \cdot P(X_2=1) \cdot P(X_3=0) \\
 &\quad \cdot P(X_4=0) \cdot P(X_5=0) \cdot P(X_6=0) \\
 &= pp(1-p)(1-p)(1-p)(1-p) \\
 &= p^2(1-p)^4
 \end{aligned}$$

Per la seconda

$$\begin{aligned}
 P(100100) &= P(X_1=1, X_2=0, X_3=0, \\
 &\quad X_4=1, X_5=0, X_6=0) \\
 &= P(X_1=1) \cdot P(X_2=0) \cdot P(X_3=0) \\
 &\quad \cdot P(X_4=1) \cdot P(X_5=0) \cdot P(X_6=0) \\
 &= p(1-p)(1-p)p(1-p)(1-p) \\
 &= p^2(1-p)^4
 \end{aligned}$$

Le sestine possibili sono

```

110000  101000  100100  100010  100001
011000  010100  010010  010001  001100
001010  001001  000110  000101  000011

```

Vale a dire

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = 15$$

i modi in cui possiamo scegliere 2 posizioni tra le 6

In definitiva

$$\begin{aligned}
 P(2 \text{ succ. su } 6) &= P(110000) + \dots + P(000011) \\
 &= p^2(1-p)^4 + \dots + p^2(1-p)^4 \\
 &= 15 p^2(1-p)^4 \\
 &= \binom{6}{2} p^2(1-p)^{6-2}
 \end{aligned}$$

In generale la v.c. che conta il numero di successi in n prove bernoulliane si chiama v.c. **Binomiale**

La v.c. Binomiale è ottenuta come la somma di n variabili casuali Y_i di tipo Bernoulli, indipendenti e di parametro p , cioè se

$$Y_1 \sim \text{Ber}(p), \dots, Y_n \sim \text{Ber}(p)$$

allora

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i$$

si dice variabile casuale Binomiale e si indica con $X \sim \text{Bin}(n, p)$ n e p sono i parametri della v.c. e rappresentano il numero di prove e la probabilità di successo in una prova

La v.c. Binomiale assume tutti i valori interi da 0 ad n ad ha distribuzione di probabilità

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Calcoliamo la media di $X \sim \text{Bin}(n, p)$

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = np$$

Mentre per la varianza $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Esempio: Tra gli anni 60 e 80 le giurie popolari negli stati del sud degli USA contenevano non più di 4 giurati afro-americani. Si può ritenere che i giurati siano eletti in modo casuale sapendo che la popolazione in quegli stati e in quel periodo era per circa il 50% composta da persone afro-americane?

Sia X la variabile casuale che conta il numero di afro-americani in una giuria di 80 persone, X è una variabile casuale Binomiale di parametri $n = 80$ e $p = 0.5$

Si fanno 80 estrazioni e il successo è rappresentato dall'evento "persona afro-americana estratta.

Calcoliamo la probabilità che in una giuria vi siano meno di 4 persone afro-americane

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 4) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \\
 &\quad + P(X = 3) + P(X = 4) \\
 &= \sum_{k=0}^4 \binom{80}{k} 0.5^k 0.5^{80-k} \\
 &\simeq 0.0000000000000000000014
 \end{aligned}$$

Per convincere i giudici dell'improbabilità di tale evento bastò dire che tale probabilità è più piccola della probabilità di fare 3 scale reali consecutive nel gioco del poker!

Esempio Un processo produttivo produce componenti che possono presentare due tipi di difetti A, B. La probabilità che venga prodotto un pezzo con tutti e due i difetti è $P(A \cap B) = 0.1$. Le probabilità di ottenere pezzi con uno dei due difetti sono $P(A) = P(B) = 0.4$. Calcolare

- a) la probabilità di ottenere un pezzo con almeno un difetto;
- b) la probabilità di ottenere un pezzo senza difetti;
- c) la probabilità che su 10 pezzi tre siano esenti da difetti nell'ipotesi che i pezzi siano prodotti indipendentemente l'uno dall'altro

a) Dobbiamo calcolare

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.4 + 0.4 - 0.1 = 0.7$$

b) Dobbiamo calcolare

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 0.3.$$

c) Consideriamo la v.c X che conta il numero di pezzi senza difetti su un'estrazione di 10 pezzi. Si tratta di una v.c Binomiale con parametri $p = 0.3$ e $n = 10$. La probabilità richiesta è data da

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0.3^3 0.7^7 = 0.266.$$

La variabile casuale Gaussiana

Una variabile casuale continua è ben definita quando:

- i) si specifica l'intervallo di valori che può assumere
- ii) viene indicata la sua funzione di densità

La variabile casuale **Normale standard** ha densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Da dove viene questa forma?

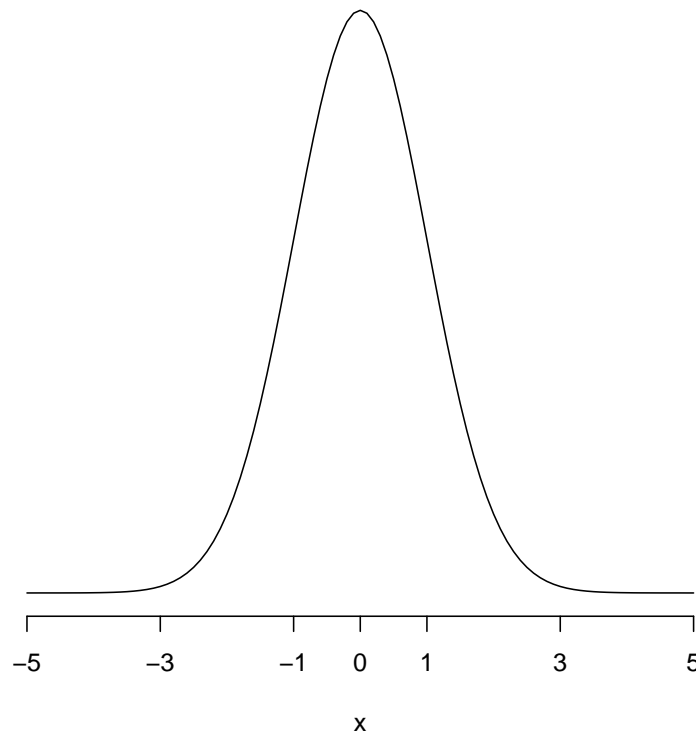
Gauss è il padre di tale distribuzione e ne fornì una derivazione partendo dall'osservazione di misure fisiche

Se m è la vera misura dell'oggetto, eseguiamo n misurazioni x_i , gli errori di misura sono definiti come

$$e_i = x_i - m$$

Raccogliamo per n grande i valori di e_i in una tabella di frequenza

La distribuzione di frequenza degli errori (allisciata) è proprio il grafico della densità Gaussiana



La variabile casuale Normale standard si indica con Z ovvero con $N(0, 1)$ ed ha le seguenti proprietà

i) $E(Z) = 0$

ii) $\text{Var}(Z) = 1$

Scriveremo $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ o
 $Z \sim N(\mu = 0, \sigma = 1)$

Come calcoliamo probabilità del tipo $P(a < Z < b)$?

Ricordiamo che come per tutte le variabili aleatorie continue si ha sempre $P(Z = z) = 0$

Utilizziamo le tavole della Normale

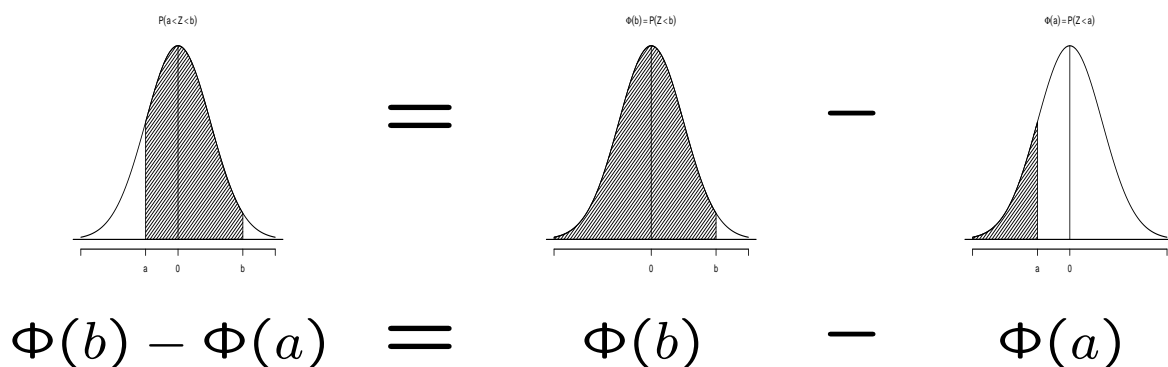
Si tratta di una tabella dove per ogni valore di z è riportato il valore di

$$\Phi(z) = P(Z < z)$$

Possiamo calcolare tutte le probabilità

$$\begin{aligned} P(a < Z < b) &= P(Z < b) - P(Z \leq a) \\ &= \Phi(b) - \Phi(a) \end{aligned}$$

Ci aiutiamo con le figure



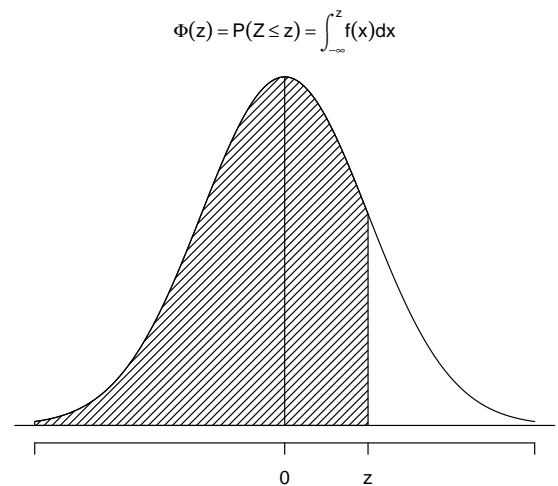
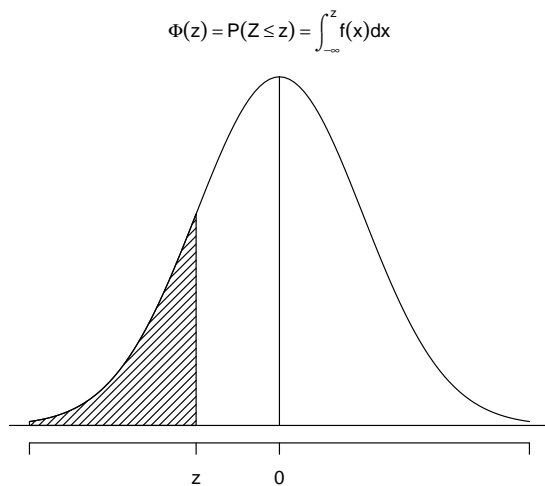
Inoltre

$$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z)$$

Se abbiamo le tavole solo per i valori positivi di Z sfruttiamo la simmetria della curva

$$\text{se } z < 0 \quad P(Z < z) = 1 - P(Z \leq -z) \quad (-z > 0!!!)$$

$$\text{se } z < 0 \quad P(Z > z) = P(Z < -z) \quad (-z > 0!!!)$$

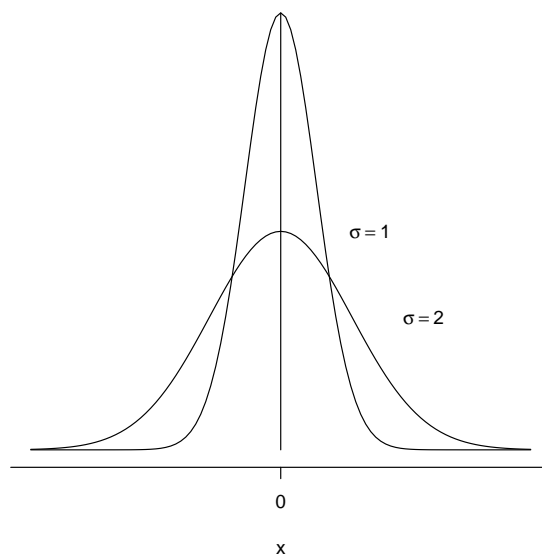
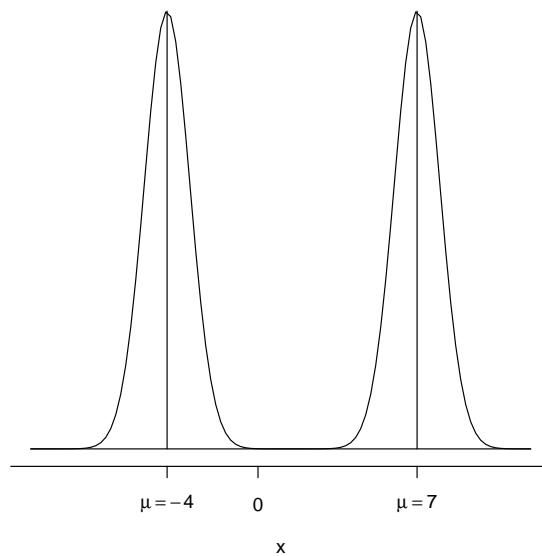


Esempio: calcolare le seguenti probabilità

- $P(Z < 2.03)$
- $P(1 < Z < 2.5)$
- $P(Z > 1.53)$
- $P(Z < -2.57)$
- $P(-1 < Z < 1)$
- $P(Z > -3)$
- $P(Z < -5)$

In generale esistono v.c. Normali per ogni valore dei parametri μ e σ . Tali v.c. si indicano con $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ o $X \sim N(\mu, \sigma)$ e hanno densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}$$



Per una v.c. $X \sim N(\mu, \sigma)$ abbiamo che $E(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2$

Se X è una Gaussiana di media 1 e varianza 4, $X \sim N(1, 2)$, come calcoliamo $P(X < 3)$?

Se X ha media μ , allora $X - \mu$ avrà media nulla, infatti

$$E(X - \mu) = E(X) - \mu = \mu - \mu = 0$$

Se X ha varianza pari a σ^2 allora X/σ ha varianza 1, infatti

$$\text{Var}(X/\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Se mettiamo assieme le due operazioni abbiamo che

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{è tale che} \quad E(Z) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Var}(Z) = 1$$

E quindi:

$$\begin{aligned} P(X < 3) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{3 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{3 - 1}{2}\right) \\ &= P(Z < 1) = \Phi(1) = 0.84134 \end{aligned}$$

Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Calcolare le probabilità $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$

$$k = 1 \quad P(|X - \mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$$

$$k = 2 \quad P(|X - \mu| < 2\sigma) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$$

$$k = 3 \quad P(|X - \mu| < 3\sigma) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$$

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| < \sigma) &= P\left(\frac{\mu - \mu - \sigma}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(-1 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= 0.84134 - 0.15866 \simeq 0.68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| < 2\sigma) &= P\left(\frac{\mu - \mu - 2\sigma}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(-2 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) \\ &= 0.97725 - 0.02275 \simeq 0.95 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| < 3\sigma) &= P\left(\frac{\mu - \mu - 3\sigma}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(-3 < Z < 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) \\ &= 0.99865 - 0.00135 \simeq 0.997 \end{aligned}$$

Proprietà della variabile casuale Gaussiana

Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ allora anche una trasformazione lineare di X è ancora Gaussiana. Vale a dire:

se a e b sono due numeri non aleatori si ha che

$$Y = a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

Somma di v.c. Gaussiane indipendenti sono ancora v.c. Gaussiane. Vale a dire:

se $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ sono indipendenti allora

$$W = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Esempio: la distribuzione delle altezze della popolazione dei coscritti alla leva del 1960 si può assumere che segua una legge normale di media $\mu = 172.7$ cm e scarto quadratico medio $\sigma = 6.7$ cm. Estratto a caso un individuo da questa popolazione, calcolare la probabilità che

- a) questo individuo ha un'altezza pari all'altezza media della popolazione;
- b) la sua altezza è inferiore all'altezza media della popolazione;
- c) la sua altezza è superiore a 152 cm;
- d) supponendo che tutti gli individui della popolazione portino scarpe con un tacco di 10 cm, con che probabilità l'altezza (con scarpe ai piedi) dell'individuo estratto è superiore a 162 cm.

Indichiamo con X la variabile *altezza dell'individuo*.
Abbiamo che

$$X \sim N(172.7, 6.7)$$

a) Poiché X è una variabile casuale continua

$$P(X = \mu) = 0$$

b) Dobbiamo calcolare $P(X < \mu)$, per la simmetria della v.c.

$$P(X < \mu) = \frac{1}{2}$$

c) Dobbiamo calcolare $P(X > 152)$

$$\begin{aligned} P(X > 152) &= 1 - P(\overline{X > 152}) = 1 - P(X \leq 152) \\ &= 1 - P(X < 152) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{152 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= 1 - P\left(Z < \frac{152 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{152 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{152 - 172.7}{6.7}\right) = 1 - \Phi(-3.1) \\ &= 1 - 0.00097 = 0.99903 \simeq 1, \end{aligned}$$

d) Sia $Y = X + 10$, $Y \sim N(182.7, 6.7)$

$$\begin{aligned} P(Y > 162) &= P(X + 10 > 162) \\ &= P(X > 152) = 0.99903 \simeq 1, \end{aligned}$$

Approssimazione della Binomiale con la Gaussiana

Ricordiamo che la v.c. binomiale conta il numero di successi in n prove Bernoulliane e la sua distribuzione è

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

La media è $E(X) = np$ mentre la varianza vale $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Quando il numero di prove n è troppo elevato il calcolo dei coefficienti binomiali genera numeri intrattabili

Si può dimostrare che la variabile X per n grande tende ad assumere la forma di una gaussiana. Precisamente

$$\frac{X - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}} \sim N(0, 1)$$

Allora possiamo calcolare la probabilità di eventi che riguardano la X ricorrendo all'approssimazione con una v.c. Gaussiana. L'approssimazione vale per $p = 0.5$ se $n > 30$, se $p \neq 0.5$ per $np \geq 5$ e $n(1 - p) \geq 5$

Esempio: un venditore contatta dei clienti e mediamente conclude una vendita 1 volta su 8. Calcolare in modo approssimato la probabilità che su 100 clienti si concludano tra 6 e 10 vendite.

Il numero di vendite è una v.c. $X \sim \text{Bin}(n = 100, p = \frac{1}{8})$. Dobbiamo calcolare $P(6 \leq X \leq 10)$.

Poiché $np = 100 \cdot \frac{1}{8} = 12.5 \geq 5$ e $n(1-p) = 100 \cdot \frac{7}{8} = 87.5 \geq 5$, utilizziamo l'approssimazione di X alla Gaussiana

$$\begin{aligned}
 P(6 \leq X \leq 10) &= P\left(\frac{6-12.5}{3.307} \leq \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{10-12.5}{3.307}\right) \\
 &\simeq P(-1.97 < Z < -0.76) \\
 &= \Phi(-0.76) - \Phi(-1.97) \\
 &= (1 - \Phi(0.76)) - (1 - \Phi(1.97)) \\
 &= (1 - 0.77637) - (1 - 0.97558) \\
 &= 0.19921
 \end{aligned}$$

Teorema del Limite Centrale

Quanto visto per la variabile casuale Binomiale è in realtà un caso particolare di un risultato assai più generale

Consideriamo n v.c. X_i i.i.d. (indipendenti ed identicamente distribuite), con stessa media μ e varianza σ^2 finite.

Allora abbiamo che, posto $Y = \sum_{i=1}^n X_i$

$$E(Y) = nE(X_i) = n\mu$$

$$\text{Var}(Y) = n\text{Var}(X_i) = n\sigma^2$$

Il teorema del limite centrale afferma che

$$Z = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0, 1)$$

Variabile casuale Uniforme

Si tratta di una variabile casuale continua. La densità è

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$

Per calcolare la probabilità che $t < x < s$ con $a \leq t < s \leq b$ si ha

$$P(t < X < s) = \int_t^s \frac{1}{b-a} dx = \frac{s-t}{b-a}$$

Vale inoltre

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{var}(X) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$