

## Ancora sull'indipendenza

Se  $A$  e  $B$  sono indipendenti allora lo sono anche

- $A$  e  $\bar{B}$
- $\bar{A}$  e  $B$
- $\bar{A}$  e  $\bar{B}$

Sfruttiamo le *leggi di De Morgan*

**Leggi di De Morgan**

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A)P(B)) \\ &= 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\bar{A})P(\bar{B}) \end{aligned}$$

## Indipendenza per più eventi

**Indipendenza nel caso di 3 eventi**

tre eventi  $A$ ,  $B$  e  $C$  si dicono indipendenti se e solo se

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

**Esercizio**

*Sia  $\Omega$  lo spazio degli eventi formato dalle  $3!$  permutazioni dei tre elementi  $a$ ,  $b$  e  $c$  più le triplette  $aaa$ ,  $bbb$ ,  $ccc$ . Sia  $A_i$  l'evento "l' $i$ -esima posizione è occupata dalla lettera  $a$ ",  $i = 1, 2, 3$ . Gli eventi  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sono indipendenti?*

## Soluzione

Lo spazio campionario  $\Omega$  è il seguente

$$\Omega = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba, aaa, bbb, ccc\}$$

Gli eventi  $A_i$  sono

$$A_1 = \{abc \cup acb \cup aaa\}, \quad P(A_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \{bac \cup cab \cup aaa\}, \quad P(A_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$A_3 = \{bca \cup cba \cup aaa\}, \quad P(A_3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Si verifica che

$$P(A_1 \cap A_2) = P(aaa) = \frac{1}{9} = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(aaa) = \frac{1}{9} = P(A_1) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(aaa) = \frac{1}{9} = P(A_2) \cdot P(A_3)$$

ma

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(aaa) = \frac{1}{9} \\ &\neq \frac{1}{27} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \end{aligned}$$

quindi i tre eventi sono indipendenti a coppie ma non nel loro insieme.

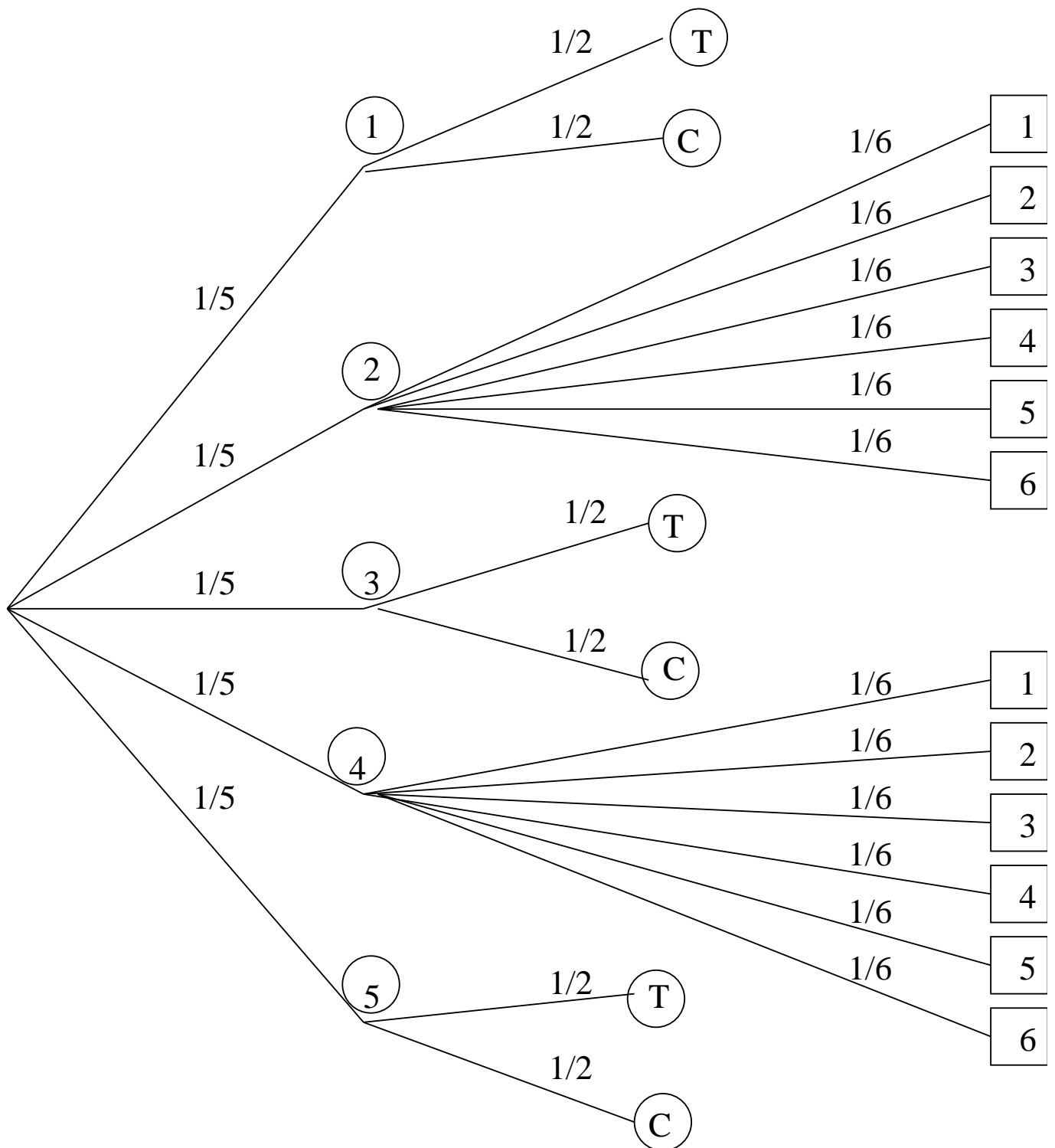
## Esercizio

*Un esperimento casuale consiste nell'estrarre una pallina da un'urna contenente cinque palline numerate da 1 a 5. Se si estrae una pallina contrassegnata con un numero dispari si lancia una moneta, mentre se si ottiene un numero pari si lancia un dado. Descrivere lo spazio campionario  $\Omega$  di tale esperimento. Calcolare la probabilità dell'evento "esce testa".*

Lo spazio campionario  $\Omega$  è

$$\Omega = \{1T, 1C, 3T, 3C, 5T, 5C, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 41, 42, 43, 44, 45, 46\}$$

$$\begin{aligned} P(T) &= P(1T \cup 3T \cup 5T) \\ &= P(T|1)P(1) + P(T|3)P(3) + P(T|5)P(5) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$



# Tipologie di campionamento

Identifichiamo la *popolazione* con un'urna contenente palline numerate da 1 a  $M$  e la pallina estratta con l'individuo scelto

Distinguiamo vari tipi di campionamento e seconda che la pallina dopo l'estrazione sia rimessa nell'urna (estrazione con reimmissione) oppure no (estrazione senza reimmissione)

Inoltre distinguiamo tra campioni estratti ordinati o non ordinati

Abbiamo quindi 4 schemi di campionamento

	ORDINATI	NON ORDINATI
CON RIPOSIZIONE		
SENZA RIPOSIZIONE		

Un campione di lunghezza  $n$  estratto dall'urna può essere indicato come  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , dove ciascun  $a_i$  rappresenta il valore della  $i$ -esima estrazione e ogni  $a_i$  può assumere valori nell'insieme  $\{1, 2, \dots, M\}$

**Primo caso.** Estrazione con riposizione e si dà importanza all'ordine. (*Disposizioni con ripetizione*)

I casi possibili sono

$$M \cdot M \cdot \dots \cdot M = M^n$$

## Esempio

Le combinazioni possibili al gioco del totocalcio sono

$$3^{13} = 1594323$$

**Secondo caso.**

Estrazione senza riposizione e si dà importanza all'ordine. (*Disposizioni semplici*)

I casi possibili sono

$$M \cdot (M - 1) \cdot \dots \cdot (M - n + 1)$$

**Esempio**

Quanti numeri di sei cifre tutte diverse si possono formare?

$$10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 5 = 151200$$

**Esempio**

In quanti modi possibili si possono ordinare 12 persone diverse?

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 479001600$$



## $n$ fattoriale

Si indica con  $n!$  ed è il numero di *permutazioni* di  $n$  oggetti, cioè in quanti modi posso ordinare  $n$  oggetti

### $n$ fattoriale

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1$$

Le disposizioni semplici possono quindi essere riscritte come

$$\frac{M!}{(M - n)!}$$

**Terzo caso.**

Estrazione senza riposizione e non ha importanza l'ordine. (*Combinazioni semplici*)

Due campioni dello schema precedente che differiscono solo per l'ordine delle palline estratte ma non per le palline estratte sono lo stesso campione in questo schema. Per ogni estrazione di  $n$  palline diverse vi sono  $n!$  modi di ordinare queste  $n$  palline. I casi possibili sono dunque

$$\frac{M \cdot (M - 1) \cdot \dots \cdot (M - n + 1)}{n!}.$$

**Esempio** Quante cinque si possono formare nel gioco del Lotto?

Sono i modi in cui si possono estrarre 5 palline da un'urna che ne contiene 90

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot \dots \cdot (90 - 5 + 1)}{5!} = 43949268$$

# Coefficiente binomiale

## Coefficiente Binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

numero di modi di estrarre  $k$  oggetti da un gruppo di  $n$

Le combinazioni semplici si possono riscrivere dunque

$$\binom{M}{n} = \frac{M \cdot (M-1) \cdot \dots \cdot (M-n+1)}{n!} = \frac{M!}{(M-n)!n!}.$$

## Proprietà di $n!$ e $\binom{n}{k}$

$$0! = 1 \quad \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

**Esercizio** Si supponga di estrarre, senza reinserirle nel mazzo, 3 carte da un mazzo da 52 carte Francesi. Si calcoli la probabilità di ottenere: a) esattamente 2 figure; b) figura alla seconda estrazione.

Le carte Francesi sono le usuali carte da Poker dove per ogni segno ( $\heartsuit$ ,  $\spadesuit$ ,  $\diamondsuit$ ,  $\clubsuit$ ) vi sono 13 carte: quelle con i numeri da 1 a 10 e poi le tre figure  $J$ ,  $Q$  e  $K$ .

a) Si devono formare gruppi di 3 carte composti da 2 figure e una non figura. I casi possibili sono i modi in cui si estraggono 3 carte da un mazzo di 52, senza dare importanza all'ordine, cioè  $\binom{52}{3}$ . I casi favorevoli, consistono nello scegliere le 2 figure tra le 12 disponibili e questo può essere fatto in  $\binom{12}{2}$  modi e una non figura tra le quaranta a disposizione in  $\binom{40}{1}$  modi. Quindi

$$P(A) = \frac{\binom{12}{2} \binom{40}{1}}{\binom{52}{3}} = \frac{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 2!} \cdot \frac{40 \cdot 39!}{39! \cdot 1!}}{\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49!}{49! \cdot 3 \cdot 2!}} = 3 \cdot \frac{40 \cdot 12 \cdot 11}{52 \cdot 51 \cdot 50}$$

b) In questo caso dobbiamo contare i casi possibili in cui si possono estrarre tre carte in cui si dà importanza all'ordine, essi sono  $52 \cdot 51 \cdot 50$ . I casi favorevoli sono invece  $40 \cdot 12 \cdot 50$  e  $12 \cdot 11 \cdot 50$ , dati da rispettivamente: non figura alla prima, figura alla seconda e una carta qualunque alla terza, oppure figura alla prima, figura alla seconda e una carta qualunque alla terza. La probabilità richiesta è quindi

$$\frac{40 \cdot 12 \cdot 50}{52 \cdot 51 \cdot 50} + \frac{12 \cdot 11 \cdot 50}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{12 \cdot 51}{52 \cdot 51} = \frac{12}{52}$$

## Esercizio

*Un'urna contiene 5 palline bianche, 6 nere, 4 rosse. Se ne estraggono 2. Calcolare la probabilità che siano dello stesso colore distinguendo i casi (a) le palline vengano estratte singolarmente rimettendo la prima pallina estratta e (b) le palline vengano estratte in coppia dall'urna*

Caso (a)  $P(\text{due palline di stesso colore})$

$$\begin{aligned} & P((R, R) \cup (B, B) \cup (N, N)) \\ &= P(R, R) + P(B, B) + P(N, N) \\ &= \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{5}{15}\right)^2 + \left(\frac{6}{15}\right)^2 = 0.342 \end{aligned}$$

Caso (b)  $P(\text{due palline di stesso colore})$

$$\begin{aligned} & P((R, R) \cup (B, B) \cup (N, N)) \\ &= P(R, R) + P(B, B) + P(N, N) \\ &= \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} + \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{14} = 0.295 \end{aligned}$$

