

ALGORITMO DEL SIMPLESSO E ANALISI DI SENSITIVITÀ

$$\begin{aligned}\max \omega &= 18x_1 + 18x_2 + 33x_3 \\ \text{s. a} \quad &3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 33 \\ &x_2 + 3x_3 \leq 32 \\ &4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 73 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

- a. scriverlo in forma standard
b. in riferimento alla base formata dalle variabili s_1, x_3, s_3 calcolare il tableau associato senza utilizzare l'algoritmo del simpleso, sapendo che l'inversa della base è

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/3 & 1 \end{bmatrix}$$

- c. la s.b. associata a tale base è ammissibile ?
la s.b. associata a tale base è ottima ?
qual è il valore della f.o.?
d. quale metodo occorre applicare per determinare la soluzione di base ammissibile ottima?
Eseguire i calcoli determinando il tableau dell'ottimo

In relazione alla soluzione ottima :

- e. cosa accade alla s.b.a.o. se il termine noto del 1° vincolo passa da 33 a 36, $b_1=36$?
calcolare la nuova s.b.a.o.
f. cosa accade alla s.b.a.o. se il termine noto del 2° vincolo da 32 a 38, $b_2=38$?
calcolare la nuova s.b.a.o.
g. per quali valori di b_3 si ottiene una soluzione degenerare?
h. per quali valori di p_1 la s.b. associata alla base conserva l'ottimalità?
i. per quale valore di p_2 è possibile migliorare la f.o.?
l. per quale valore di p_2 si ottengono soluzioni ottime alternative?
m. come cambierebbe la soluzione ottima se p_3 diminuisse a 30?
n. cosa accade se varia la prima componente della colonna \underline{a}_2 ?
o. si costruisca il problema duale

RISOLUZIONE

- a.
In forma di minimo

$$\begin{aligned}\min \varphi &= -18x_1 - 18x_2 - 33x_3 \\ \text{s. a} \quad &3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 33 \\ &x_2 + 3x_3 \leq 32 \\ &4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 73 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

In forma standard

$$\begin{aligned}
 \min \varphi &= -18x_1 - 18x_2 - 33x_3 \\
 \text{s. a} \quad &3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \quad = 33 \\
 &\quad \quad x_2 + 3x_3 + \quad = 32 \\
 &4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + \quad = 73 \\
 &x_1, x_2, x_3, \quad, \quad, \geq 0
 \end{aligned}$$

Tableau iniziale

$$T = \begin{array}{c|ccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \text{t. noti} \\
 \hline
 & 3 & 2 & & 1 & 0 & & & 33 \\
 & & 1 & 3 & & 1 & & & 32 \\
 & 4 & & 5 & & 0 & & & 73 \\
 \hline
 & 18 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{array}$$

b.
Nota l'inversa della base e le variabili di base del tableau associato alla B^{-1} data, si ha

$$T = \begin{array}{c|ccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \text{t. noti} \\
 \hline
 & & & 0 & 1 & -2/3 & 0 & 0 & \\
 & & & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & \\
 & & & 0 & 0 & -5/3 & 1 & 0 & \\
 \hline
 & & & 0 & 0 & & 0 & 1 &
 \end{array}$$

Si devono determinare le due colonne relative alle variabili decisionali x_1 e x_2 , i coefficienti di costo relativo, il vettore soluzione x_B ed il valore della funzione.

Calcolo delle colonne del tableau relative variabili non di base

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 4 & 7/3 & -5/3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_N = c_B^T B^{-1} N - c^T = [0, -33, 0] \begin{bmatrix} 3 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 4 & 7/3 & -1/3 \end{bmatrix} - [-18, -18, 0]$$

$$\underline{r}_N = [\dots, \dots, \dots] - [-18, -18, 0] = [\dots, 7, \dots]$$

$$\underline{x}_B = B^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33 \\ 32 \\ 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35/.. \\ \dots/3 \\ \dots/3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = [0, -33, 0] \begin{bmatrix} 35/3 \\ 32/3 \\ 59/3 \end{bmatrix} = -352$$

Pertanto il tableau risulta

$$T = \left[\begin{array}{cccccc|c|c} & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \varphi & \mathbf{t. \ noti} \\ \hline & 3 & 4/3 & 0 & 1 & & 0 & & \\ & 0 & & 1 & 0 & & 0 & & \\ & 4 & & 0 & 0 & & 1 & & \\ \hline & 18 & & 0 & 0 & -11 & 0 & & \end{array} \right]$$

Si osserva che

- c. la s.b. associata a tale base è ammissibile, in quanto tutti i termini del vettore \mathbf{x}_B sono non negativi la s.b. associata a tale base non è ottima in quanto vi sono coefficienti di costo positivi, il valore della f.o. è $\varphi = -352$
- d. il metodo che occorre applicare per determinare la soluzione di base ammissibile ottima è l'algoritmo del simplesso primale

Selezionata x_1 quale variabile da portare in base, l'elemento pivot è 3, quindi si ha:

$\bar{r}_1 = \frac{1}{3} r_1$	1	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{35}{9}$
$\bar{r}_2 = r_2$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{32}{3}$
	4	$\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$	1	0	$\frac{59}{3}$
$\bar{r}_3 = r_3 - 4\bar{r}_1$	-4	$-\frac{16}{9}$	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{9}$	0	0	$-\frac{140}{9}$
	0	$\frac{5}{9}$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{9}$	1	0	$\frac{37}{9}$
	18	7	0	0	-11	0	1	-352
$\bar{r}_0 = r_0 - 18\bar{r}_1$	-18	-8	0	-6	4	0	0	-70
	0	-1	0	-6	-7	0	1	-422

Il tableau risulta

$$T = \begin{array}{c|ccccccc|c} & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \varphi & \mathbf{t. \text{ noti}} \\ \hline & 1 & 4/9 & & & & 0 & 0 & \\ & 0 & 1/3 & & & & 0 & 0 & \\ & 0 & & 0 & -4/3 & & 1 & 0 & \\ \hline & 0 & -1 & 0 & -6 & -7 & 0 & 1 & -422 \end{array}$$

Valori ottimi delle v. decisionali

Il valore della f.o. viene massimizzato da

- $x_1 = 35/9$
 - $x_2 = 0$
 - $x_3 = 32/3$
- $\omega = 422$.

Stato delle risorse nella soluzione ottima $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 37/3$

Vi sono delle eccedenze della terza risorsa, mentre non vi sono eccedenze della prima e seconda risorsa.

In relazione alla soluzione ottima trovata al punto e

e. Variazione dei termini noti dei vincoli

se il valore di b_1 passa da 33 a 36

$$\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/9 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -7/9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 \\ 32 \\ 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44/9 \\ 32/3 \\ 1/9 \end{bmatrix}$$

i valori sono tutti positivi, quindi la soluzione è ancora ammissibile e ottima, il valore della f.o. è

$$\tilde{\phi} = \phi + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{e}_1 \delta \quad \tilde{\phi} = -422 + (-6)3 = -440$$

$$\omega = 440$$

f. cosa accade alla s.b.a.o. se il valore di b_2 passa da 32 a 38 ?
calcolare la nuova s.b.a.o.

$$\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/9 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -7/9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33 \\ 38 \\ 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23/9 \\ 38/3 \\ -5/9 \end{bmatrix}$$

i valori non sono tutti positivi, quindi la soluzione non è più ammissibile, il valore della f.o. è

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \mathbf{c}_B^T B^{-1} \underline{e}_2 \delta = -422 + [-6, -7, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta$$

$\delta = 38 - 32 = 6$ quindi

$$\tilde{\varphi} = -422 - 7(6) = -422 - 42 = -464 \quad \tilde{\omega} = \dots\dots$$

il nuovo tableau risulta

	\mathbf{x}_1	\mathbf{x}_2	\mathbf{x}_3	\mathbf{s}_1	\mathbf{s}_2	\mathbf{s}_3	φ	t. noti
T =	1		0	1/3	-2/9			
	0		1	0	1/3			
	0		0		-7/9			
	0	-1	0		-7			

per la presenza del valore $s_3 = -5/9$ si deve applicare l'algoritmo del simplesso duale ristabilendo così l'ammissibilità.

Selezionata la riga 3 ed individuato l'elemento pivot $-4/3$, la variabile che entra in base è la s_1 , quindi si ha:

$$\begin{array}{l} \overline{r}_3 = -\frac{3}{4}r_3 \end{array} \quad \begin{array}{cccccccc} 0 & -\frac{5}{12} & 0 & 1 & \frac{7}{12} & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{5}{12} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overline{r}_1 = r_1 - \frac{1}{3}r_3 \\ \overline{r}_2 = r_2 \end{array} \quad \begin{array}{cccccccc} 1 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & 0 & 0 & \frac{23}{9} \\ 0 & \frac{5}{36} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{36} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{36} \\ \hline 1 & \frac{7}{12} & 0 & 0 & -\frac{5}{12} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{29}{12} \end{array}$$

$$\overline{r}_0 = r_0 + 6\overline{r}_3 \quad \begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & -6 & -7 & 0 & 1 & -464 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 6 & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ \hline 0 & -\frac{7}{2} & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & 1 & -\frac{923}{2} \end{array}$$

il nuovo tableau risulta

$$T = \begin{array}{c|ccccccc|c} & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \varphi & \mathbf{t. \text{ noti}} \\ \hline & 1 & & 0 & 0 & & 1/4 & 0 & \\ & 0 & & 1 & 0 & & 0 & 0 & \\ & 0 & & 0 & 1 & & -3/4 & 0 & \\ \hline & 0 & & 0 & 0 & & & 1 & -923/2 \end{array}$$

Si ricava la soluzione ottima

$$x_1 = 29/12 \text{ v.b.}$$

$$x_2 = 0 \text{ v.n.b.}$$

$$x_3 = 38/3 \text{ v.b.} \quad \text{e} \quad \varphi = - \dots \quad \omega =$$

$$s_1 = 5/12 \text{ v.b.}$$

$$s_2 = 0 \text{ v.n.b.}$$

$$s_3 = 0 \text{ v.n.b.}$$

g. calcolo dei valori di b_3 per i quali si ottiene una soluzione degenera

$$\tilde{b}_3 = b_3 + \delta$$

$$\tilde{x}_B = x_B + B^{-1}e_3$$

$$\tilde{x}_B = \begin{bmatrix} \frac{35}{9} \\ \frac{32}{3} \\ \frac{37}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta = \begin{bmatrix} \frac{35}{9} \\ \frac{32}{3} \\ \frac{37}{3} + \delta \end{bmatrix}$$

perché ci sia degenerazione almeno una componente della soluzione x_B deve essere nulla, quindi $\frac{37}{3} + \delta = 0 \Rightarrow \delta = -\frac{37}{3}$ e quindi $b_3 = 73 - \frac{37}{3} = \frac{182}{3}$

h. calcolo dei valori di p_1 per i quali si conserva l'ottimalità

p_1 è relativa alla prima variabile di base, quindi una sua variazione influirà sui coefficienti di costo ridotto e sul valore della funzione.

$$\tilde{p}_1 = 18 + \delta$$

$$\tilde{c}_1 = -18 - \delta$$

$$\tilde{r}_N^T = [-1, -6, -7] - \left[\frac{4}{9}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{9} \right] \delta = \left[-1 - \frac{4}{9}\delta, -6 - \frac{1}{3}\delta, -7 + \frac{2}{9}\delta \right]$$

Affinché si conservi l'ottimalità deve risultare

$$\tilde{r}_2 = \left[-1 - \frac{4}{9}\delta \right] \leq 0 \rightarrow \delta \geq -\frac{9}{4}$$

$$\tilde{r}_4 = \left[-6 - \frac{1}{3}\delta \right] \leq 0 \rightarrow \delta \geq -18$$

$$\tilde{r}_5 = \left[-7 + \frac{2}{9}\delta \right] \leq 0 \rightarrow \delta \leq \frac{63}{2}$$

$$\text{e quindi } -\frac{9}{4} \leq \delta \leq \frac{63}{2}, \text{ quindi } \tilde{p}_1 \geq 18 - \frac{9}{4} \text{ e } \tilde{p}_1 \leq 18 + \frac{63}{2} \dots\dots$$

$$\frac{63}{4} \leq \tilde{p}_1 \leq \frac{99}{2}$$

i. calcolo dei valori di p_2 per i quali la variabile x_2 può entrare in base.

In una tale circostanza dovendo eseguire un altro passo dell'algoritmo del simplesso primale si avrà un miglioramento della f.o.

p_2 è relativa alla variabile x_2 variabile non di base, quindi una sua variazione influirà sul corrispondente coefficienti di costo ridotto.

$$\tilde{p}_2 = 18 + \delta \quad \text{quindi}$$

$$\tilde{r}_2 = -1 + \delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq 1$$

$$\text{e} \quad \tilde{p}_2 \geq 19$$

l. calcolo dei valori di p_2 per i quali si ottengono soluzioni ottime alternative analogamente

$$\tilde{p}_2 = 18 + \delta \quad \text{quindi}$$

$$r_2 = -1 + \delta = 0 \Rightarrow \delta = +1$$

$$\text{e} \quad \tilde{p}_2 = 19$$

m. se il coefficiente della 2^a variabile di base x_3 diminuisse fino a 30 varierebbero i coefficienti di costo ridotto ed il valore della funzione, infatti

$$\tilde{p}_3 = 30 \Rightarrow \delta = 30 - 33 = -3$$

$$\underline{c}_B^T B^{-1} = [-18, -30, 0] \begin{bmatrix} 1/3 & -2/9 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -7/9 & 1 \end{bmatrix} = [- \dots, -6, \dots]$$

$$r_N^T = [0, -6, -6] \quad \text{e} \quad \varphi = -422 + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} = -422 + [-6, -6, 0] \begin{bmatrix} 33 \\ 32 \\ 73 \end{bmatrix} = - \dots$$

$$\text{o equivalentemente} \quad \varphi = -422 + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} = -422 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35/9 \\ 32/3 \\ 37/3 \end{bmatrix} (3) = - \dots$$

$$\omega = \dots$$

o. Variazione della prima componente della colonna \underline{a}_2

Le variazioni che consideriamo riguardano solo termini relativi a v.n.b., perché in caso contrari, si avrebbero variazioni della base, circostanza che richiederebbe uno studio abbastanza complesso che non affronteremo.

Ricordiamo la composizione del tableau finale in funzione del tableau iniziale

$$\begin{bmatrix} B^{-1}A & [B^{-1}] & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \underline{c}_B^T B^{-1}A - \underline{c}^T & \underline{c}_B^T B^{-1} & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_i' = B^{-1}\underline{a}_i \quad \text{risulterà} \quad \tilde{\underline{a}}_i = \underline{a}_i + \underline{e}_j \delta$$

Nel caso in esame nel tableau finale colonna valutiamo la colonna \underline{a}_2

$$T = \begin{array}{c|ccccccc|c} & \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \mathbf{s_1} & \mathbf{s_2} & \mathbf{s_3} & \varphi & \mathbf{t. noti} \\ \hline & 1 & \mathbf{4/9} & & & -2/9 & 0 & & 35/9 \\ & 0 & \mathbf{1/3} & & & 1/3 & 0 & & 32/3 \\ & 0 & \mathbf{5/9} & & -4/3 & & 1 & & 37/3 \\ \hline & 0 & \mathbf{-1} & & -6 & & 0 & & -422 \end{array}$$

l' omologa nel tableau iniziale è

$$T = \begin{array}{c|ccccccc|c} & \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \mathbf{s_1} & \mathbf{s_2} & \mathbf{s_3} & \varphi & \mathbf{t. noti} \\ \hline & & \mathbf{2} & & 1 & 0 & 0 & 0 & 33 \\ & & \mathbf{1} & & 0 & 1 & 0 & 0 & 32 \\ & & \mathbf{4} & & 0 & 0 & 1 & 0 & 73 \\ \hline & 18 & \mathbf{18} & 34 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

le colonne relative a v.n.b. Sono

$$N = \begin{matrix} & 2^{\wedge} & 4^{\wedge} & 5^{\wedge} \\ & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix}$$

Se varia la prima componente della colonna \underline{a}_2

$$\tilde{\underline{a}}_2 = \underline{a}_2 + e_1 \delta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta = \begin{bmatrix} 2+\delta \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

dei coefficienti di costo relativo $\underline{r}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} A - \underline{c}^T$ oppure $\underline{r}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}^T$

varia solo l' elemento

$$\underline{r}_2 = \underline{c}_B^T B^{-1} \tilde{\underline{a}}_2 - \underline{c}_2$$

con $\underline{c}_B^T B^{-1}$ ultima riga del tableau in corrispondenza v. b. iniziali [-6 -7 0]

$$\text{con } \tilde{\underline{a}}_2 = \begin{bmatrix} 2+\delta \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } \underline{c}_2 = -18$$

$$\text{quindi } \tilde{\underline{r}}_2 = [-6, -7, 0] \begin{bmatrix} 2+\delta \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - (-18) = -19 - 6\delta + 18 = -1 - 6\delta$$

se $\tilde{\underline{r}}_2 \leq 0$ la base è ancora ottima [per $\delta > -\frac{1}{6}$, in particolare per $\delta = -\frac{1}{6}$ soluzioni ottime alternative]

se $\tilde{\underline{r}}_1 > 0$ la base non è ottima [per $\delta < -\frac{1}{6}$], va portato in base x_2 con il metodo del simplesso.

p. costruzione del problema duale

$$T_i = \left[\begin{array}{ccccccc|c} & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \varphi & \mathbf{t. \ noti} \\ & & 2 & & 1 & 0 & & & \\ & 0 & & 3 & & 1 & 0 & 0 & \\ & 4 & 4 & 5 & & 0 & & 0 & \\ \hline & 18 & & 33 & 0 & & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\underline{c}^T = [-18, -18, -33] \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 33 \\ 32 \\ 73 \end{bmatrix}$$

I vincoli diventano:

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_1 = 33$$

$$x_2 + 3x_3 + s_2 = 32$$

$$4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + s_3 = 73$$

sarà

$$\underline{b}^T = [33, 32, 73]$$

$$-A^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & -4 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} -18 \\ -18 \\ -33 \end{bmatrix}$$

e quindi risulta il problema duale:

$$\min 33y_1 + 32y_2 + 73y_3$$

$$\text{s.a } -3y_1 - 4y_3 \leq -18$$

$$-2y_1 - y_2 - 4y_3 \leq -18$$

$$-2y_1 - 3y_2 - 5y_3 \leq -33$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$