

## ALGORITMO DEL SIMPLESSO E ANALISI DI SENSITIVITÀ

$$\begin{aligned} \max \omega &= 18x_1 + 18x_2 + 33x_3 \\ \text{s. a} \quad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 33 \\ x_2 + 3x_3 &\leq 32 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\leq 73 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- a. scriverlo in forma standard  
b. in riferimento alla base formata dalle variabili  $s_1, x_3, s_3$  calcolare il tableau associato senza utilizzare l'algoritmo del simpleso, sapendo che l'inversa della base è

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/3 & 1 \end{bmatrix}$$

- c. la s.b. associata a tale base è ammissibile ?  
la s.b. associata a tale base è ottima ?  
qual è il valore della f.o.?  
d. quale metodo occorre applicare per determinare la soluzione di base ammissibile ottima?  
Eeguire i calcoli determinando il tableau dell'ottimo

### In relazione alla soluzione ottima :

- e. cosa accade alla s.b.a.o. se il termine noto del 1° vincolo passa da 33 a 36,  $b_1=36$ ?  
calcolare la nuova s.b.a.o.  
f. cosa accade alla s.b.a.o. se il termine noto del 2° vincolo da 32 a 38,  $b_2=38$ ?  
calcolare la nuova s.b.a.o.  
g. per quali valori di  $b_3$  si ottiene una soluzione degenerare?  
h. per quali valori di  $p_1$  la s.b. associata alla base conserva l'ottimalità?  
i. per quale valore di  $p_2$  è possibile migliorare la f.o.?  
l. per quale valore di  $p_2$  si ottengono soluzioni ottime alternative?  
m. come cambierebbe la soluzione ottima se  $p_3$  diminuisse a 30?  
n. cosa accade se varia la prima componente della colonna  $\underline{a}_2$ ?  
o. si costruisca il problema duale

### RISOLUZIONE

- a.  
In forma di minimo

$$\begin{aligned} \min \varphi &= -18x_1 - 18x_2 - 33x_3 \\ \text{s. a} \quad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 33 \\ x_2 + 3x_3 &\leq 32 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\leq 73 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

In forma standard

$$\begin{aligned} \min \varphi &= -18x_1 - 18x_2 - 33x_3 \\ \text{s. a} \quad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + &= 33 \\ x_2 + 3x_3 + &= 32 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + &= 73 \\ x_1, x_2, x_3, &, , \geq 0 \end{aligned}$$

Tableau iniziale

$$T = \begin{array}{c|ccccccc|c} & \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \mathbf{s_1} & \mathbf{s_2} & \mathbf{s_3} & \varphi & \mathbf{t. noti} \\ \hline & 3 & 2 & & 1 & 0 & & & 33 \\ & & 1 & 3 & & 1 & & & 32 \\ & 4 & & 5 & & 0 & & & 73 \\ \hline & 18 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

b.  
Nota l'inversa della base e le variabili di base del tableau associato alla  $B^{-1}$  data, si ha

$$T = \begin{array}{c|ccccccc|c} & \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \mathbf{s_1} & \mathbf{s_2} & \mathbf{s_3} & \varphi & \mathbf{t. noti} \\ \hline & & & 0 & 1 & -2/3 & 0 & 0 & \\ & & & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & -5/3 & 1 & 0 & \\ \hline & & & 0 & 0 & & 0 & 1 & \end{array}$$

Si devono determinare le due colonne relative alle variabili decisionali  $x_1$  e  $x_2$ , i coefficienti di costo relativo, il vettore soluzione  $x_B$  ed il valore della funzione.

Calcolo delle colonne del tableau relative variabili non di base

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 4 & 7/3 & -5/3 \end{bmatrix}$$

$$r_N = c_B^T B^{-1} N - c^T = [0, -33, 0] \begin{bmatrix} 3 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 4 & 7/3 & -1/3 \end{bmatrix} - [-\dots, -\dots, 0]$$

$$r_N = [\dots, \dots, \dots] - [-18, -18, 0] = [\dots, 7, -\dots]$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33 \\ 32 \\ 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35/3 \\ \dots/3 \\ \dots/3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = c_B^T B^{-1} b = [0, -33, 0] \begin{bmatrix} 35/3 \\ 32/3 \\ 59/3 \end{bmatrix} = -352$$

Pertanto il tableau risulta

$$T = \begin{array}{c|ccccccc|c} & \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \mathbf{s_1} & \mathbf{s_2} & \mathbf{s_3} & \varphi & \mathbf{t. noti} \\ \hline & 3 & 4/3 & 0 & 1 & & 0 & & \\ & 0 & & 1 & 0 & & 0 & & \\ & 4 & & 0 & 0 & & 1 & & \\ \hline & 18 & & 0 & 0 & -11 & 0 & & \end{array}$$

Si osserva che

- c. la s.b. associata a tale base è ammissibile, in quanto tutti i termini del vettore  $x_B$  sono non negativi la s.b. associata a tale base non è ottima in quanto vi sono coefficienti di costo positivi, il valore della f.o. è  $\varphi = -352$
- d. il metodo che occorre applicare per determinare la soluzione di base ammissibile ottima è l'algoritmo del simplesso primale

Selezionata  $x_1$  quale variabile da portare in base, l'elemento pivot è 3, quindi si ha:

$$\begin{array}{l} \bar{r}_1 = \frac{1}{3}r_1 \quad \quad \quad 1 \quad \frac{4}{9} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{2}{9} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{35}{9} \\ \\ \bar{r}_2 = r_2 \quad \quad \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{32}{3} \\ \\ \bar{r}_3 = r_3 - 4\bar{r}_1 \quad \quad \quad 4 \quad \frac{7}{3} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{5}{3} \quad 1 \quad 0 \quad \frac{59}{3} \\ \quad \quad \quad -4 \quad -\frac{16}{9} \quad 0 \quad -\frac{4}{3} \quad \frac{8}{9} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{140}{9} \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 0 \quad \frac{5}{9} \quad 0 \quad -\frac{4}{3} \quad -\frac{7}{9} \quad 1 \quad 0 \quad \frac{37}{9} \\ \\ \bar{r}_0 = r_0 - 18\bar{r}_1 \quad \quad \quad 18 \quad 7 \quad 0 \quad 0 \quad -11 \quad 0 \quad 1 \quad -352 \\ \quad \quad \quad -18 \quad -8 \quad 0 \quad -6 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad -70 \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -6 \quad -7 \quad 0 \quad 1 \quad -422 \end{array}$$

Il tableau risulta

$$T = \left[ \begin{array}{ccccccc|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \text{t. noti} \\ \hline & 1 & 4/9 & & & & 0 & 0 & \\ & 0 & 1/3 & & & & 0 & 0 & \\ & 0 & & 0 & -4/3 & & 1 & 0 & \\ \hline & 0 & -1 & 0 & -6 & -7 & 0 & 1 & -422 \end{array} \right]$$

### Valori ottimi delle v. decisionali

Il valore della f.o. viene massimizzato da

- $x_1 = 35/9$
  - $x_2 = 0$
  - $x_3 = 32/3$
- $\omega = 422$ .

### Stato delle risorse nella soluzione ottima $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 37/3$

Vi sono delle eccedenze della terza risorsa, mentre non vi sono eccedenze della prima e seconda risorsa.

In relazione alla soluzione ottima trovata al punto c

### e. Variazione dei termini noti dei vincoli

se il valore di  $b_1$  passa da 33 a 36

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/9 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -7/9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 \\ 32 \\ 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44/9 \\ 32/3 \\ 1/9 \end{bmatrix}$$

i valori sono tutti positivi, quindi la soluzione è ancora ammissibile e ottima, il valore della f.o. è

$$\tilde{\phi} = \phi + c_B^T B^{-1} e_1 \delta \quad \tilde{\phi} = -422 + (-6)3 = -440$$

$$\omega = 440$$

f. cosa accade alla s.b.a.o. se il valore di  $b_2$  passa da 32 a 38 ?  
calcolare la nuova s.b.a.o.

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/9 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -7/9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33 \\ 38 \\ 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23/9 \\ 38/3 \\ -5/9 \end{bmatrix}$$

i valori non sono tutti positivi, quindi la soluzione non è più ammissibile, il valore della f.o. è

$$\tilde{\phi} = \phi + c_B^T B^{-1} e_2 \delta = -422 + [-6, -7, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta$$

$$\delta = 38 - 32 = 6 \text{ quindi}$$

$$\tilde{\phi} = -422 - 7(6) = -422 - 42 = -464 \quad \tilde{\omega} = \dots$$

il nuovo tableau risulta

$$T = \begin{array}{c|cccccc|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \phi & \text{t. noti} \\ \hline & 1 & & 0 & 1/3 & -2/9 & & & \\ & 0 & & 1 & 0 & 1/3 & & & \\ & 0 & & 0 & & -7/9 & & & \\ \hline & 0 & -1 & 0 & & -7 & & & \end{array}$$

per la presenza del valore  $s_3 = -5/9$  si deve applicare l'algoritmo del simplesso duale ristabilendo così l'ammissibilità.

Selezionata la riga 3 ed individuato l'elemento pivot  $-4/3$ , la variabile che entra in base è la  $s_1$ , quindi si ha:

$$\bar{r}_3 = -\frac{3}{4}r_3 \quad 0 \quad -\frac{5}{12} \quad 0 \quad 1 \quad \frac{7}{12} \quad -\frac{3}{4} \quad 0 \quad \frac{5}{12}$$

$$\begin{array}{cccccccc} \overline{r_1} = r_1 - \frac{1}{3}r_3 & 1 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & 0 & 0 & \frac{23}{9} \\ & 0 & \frac{5}{36} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{36} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{36} \\ \hline & 1 & \frac{7}{12} & 0 & 0 & -\frac{5}{12} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{29}{12} \end{array}$$

$$\overline{r_2} = r_2 \quad \begin{array}{cccccccc} 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{38}{3} \end{array}$$

$$\overline{r_0} = r_0 + 6\overline{r_3} \quad \begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & -6 & -7 & 0 & 1 & -464 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 6 & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ \hline 0 & -\frac{7}{2} & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & 1 & -\frac{923}{2} \end{array}$$

il nuovo tableau risulta

$$T = \left[ \begin{array}{ccccccc|c|c} & \mathbf{x_1} & & \mathbf{x_2} & & \mathbf{x_3} & & \mathbf{s_1} & & \mathbf{s_2} & & \mathbf{s_3} & & \varphi & & \mathbf{t. \ noti} \\ \hline & 1 & & & & 0 & & 0 & & & & 1/4 & & 0 & & \\ & 0 & & & & 1 & & 0 & & & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & & & 0 & & 1 & & & & -3/4 & & 0 & & \\ \hline & 0 & & & & 0 & & 0 & & & & & & 1 & & -923/2 \end{array} \right]$$

Si ricava la soluzione ottima

$$\begin{array}{ll} x_1 = 29/12 & \text{v.b.} \\ x_2 = 0 & \text{v.n.b.} \\ x_3 = 38/3 & \text{v.b.} \\ s_1 = 5/12 & \text{v.b.} \\ s_2 = 0 & \text{v.n.b.} \\ s_3 = 0 & \text{v.n.b.} \end{array} \quad \text{e} \quad \varphi = - \dots \quad \omega =$$

**g.** calcolo dei valori di  $b_3$  per i quali si ottiene una soluzione degenere

$$\begin{aligned} \tilde{b}_3 &= b_3 + \delta \\ \tilde{x}_B &= x_B + B^{-1}e_3 \\ \tilde{x}_B &= \begin{bmatrix} \frac{35}{9} \\ \frac{32}{3} \\ 37 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta = \begin{bmatrix} \frac{35}{9} \\ \frac{32}{3} \\ 37 \\ \frac{37}{9} + \delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

perché ci sia degenerazione almeno una componente della soluzione  $x_B$  deve essere nulla, quindi

$$\frac{37}{9} + \delta = 0 \Rightarrow \delta = -\frac{37}{9} \text{ e quindi } b_3 = 73 - \frac{37}{9} = \frac{620}{9}$$

**h.** calcolo dei valori di  $p_1$  per i quali si conserva l'ottimalità

$p_1$  è relativa alla prima variabile di base, quindi una sua variazione influirà sui coefficienti di costo ridotto e sul valore della funzione.

$$\tilde{p}_1 = 18 + \delta$$

$$\tilde{c}_1 = -18 - \delta$$

$$\tilde{r}_N^T = [-1, -6, -7] - \left[ \frac{4}{9}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{9} \right] \delta = \left[ -1 - \frac{4}{9}\delta, -6 - \frac{1}{3}\delta, -7 + \frac{2}{9}\delta \right]$$

Affinché si conservi l'ottimalità deve risultare

$$\tilde{r}_2 = \left[ -1 - \frac{4}{9}\delta \right] \leq 0 \rightarrow \delta \geq -\frac{9}{4}$$

$$\tilde{r}_4 = \left[ -6 - \frac{1}{3}\delta \right] \leq 0 \rightarrow \delta \geq -18$$

$$\tilde{r}_5 = \left[ -7 + \frac{2}{9}\delta \right] \leq 0 \rightarrow \delta \leq \frac{63}{2}$$

$$\text{e quindi } -\frac{9}{4} \leq \delta \leq \frac{63}{2}, \text{ quindi } \tilde{p}_1 \geq 18 - \frac{9}{4} \text{ e } \tilde{p}_1 \leq 18 + \frac{63}{2} \dots\dots$$

$$\frac{63}{4} \leq \tilde{p}_1 \leq \frac{99}{2}$$

**i.** calcolo dei valori di  $p_2$  per i quali la variabile  $x_2$  può entrare in base.

*In una tale circostanza dovendo eseguire un altro passo dell'algoritmo del simplesso primale si avrà un miglioramento della f.o.*

$p_2$  è relativa alla variabile  $x_2$  variabile non di base, quindi una sua variazione influirà sui corrispondenti coefficienti di costo ridotto.

$$\tilde{p}_2 = 18 + \delta \quad \text{quindi}$$

$$\tilde{r}_2 = -1 + \delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq 1$$

$$\text{e} \quad \tilde{p}_2 \geq 19$$

**l.** calcolo dei valori di  $p_2$  per i quali si ottengono soluzioni ottime alternative

analogamente

$$\tilde{p}_2 = 18 + \delta \quad \text{quindi}$$

$$\tilde{r}_2 = -1 + \delta = 0 \Rightarrow \delta = +1$$

e  $\tilde{p}_2 = 19$

**m.** se il coefficiente della 2^a variabile di base  $x_3$  diminuisse fino a 30 varierebbero i coefficienti di costo ridotto ed il valore della funzione, infatti

$$\tilde{p}_3 = 30 \Rightarrow \delta = 30 - 33 = -3$$

$$\underline{c}_B^T B^{-1} = [-18, -30, 0] \begin{bmatrix} 1/3 & -2/9 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -7/9 & 1 \end{bmatrix} = [- \dots, -6, \dots]$$

$$r_N^T = [0, -6, -6] \quad e \quad \varphi = -422 + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} = -422 + [-6, -6, 0] \begin{bmatrix} 33 \\ 32 \\ 73 \end{bmatrix} = - \dots$$

o equivalentemente 
$$\varphi = -422 + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} = -422 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35/9 \\ 32/3 \\ 37/3 \end{bmatrix} (3) = - \dots$$

$\omega = \dots$

**o.** Variazione della prima componente della colonna  $\underline{a}_2$

Le variazioni che consideriamo riguardano solo termini relativi a v.n.b., perché in caso contrari, si avrebbero variazioni della base, circostanza che richiederebbe uno studio abbastanza complesso che non affronteremo.

Ricordiamo la composizione del tableau finale in funzione del tableau iniziale

$$\begin{bmatrix} B^{-1}A & [B^{-1}] & 0 & B^{-1}\underline{b} \\ \underline{c}_B^T B^{-1}A - \underline{c}^T & \underline{c}_B^T B^{-1} & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma \end{bmatrix}$$

$\underline{a}_i' = B^{-1}\underline{a}_i$  risulterà  $\tilde{\underline{a}}_i = \underline{a}_i + \underline{e}_j\delta$

Nel caso in esame nel tableau finale colonna valutiamo la colonna  $\underline{a}_2$

$$T = \begin{array}{c|cccccc|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \text{t. noti} \\ \hline & 1 & 4/9 & & & -2/9 & 0 & & 35/9 \\ & 0 & 1/3 & & & 1/3 & 0 & & 32/3 \\ & 0 & 5/9 & & -4/3 & & 1 & & 37/3 \\ \hline & 0 & -1 & & -6 & & 0 & & -422 \end{array}$$

l' omologa nel tableau iniziale è

$$T = \begin{array}{c|cccccc|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \text{t. noti} \\ \hline & & 2 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 33 \\ & & 1 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 32 \\ & & 4 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 73 \\ \hline & 18 & 18 & 34 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

le colonne relative a v.n.b. sono

$$N = \begin{matrix} & 2^{\wedge} & 4^{\wedge} & 5^{\wedge} \\ \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

Se varia la prima componente della colonna  $\underline{a}_2$

$$\tilde{\underline{a}}_2 = \underline{a}_2 + e_1 \delta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta = \begin{bmatrix} 2 + \delta \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

dei coefficienti di costo relativo  $\underline{r}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} A - \underline{c}^T$  oppure  $\underline{r}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}^T$

varia solo l' elemento

$$\underline{r}_2 = \underline{c}_B^T B^{-1} \tilde{\underline{a}}_2 - \underline{c}_2$$

con  $\underline{c}_B^T B^{-1}$  ultima riga del tableau in corrispondenza v. b. iniziali [-6 -7 0]

$$\text{con } \tilde{\underline{a}}_2 = \begin{bmatrix} 2 + \delta \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } \underline{c}_2 = -18$$

$$\text{quindi } \tilde{\underline{r}}_2 = [-6, -7, 0] \begin{bmatrix} 2 + \delta \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - (-18) = -19 - 6\delta + 18 = -1 - 6\delta$$

se  $\tilde{\underline{r}}_2 \leq 0$  la base è ancora ottima [ per  $\delta > -\frac{1}{6}$ , in particolare per  $\delta = -\frac{1}{6}$  soluzioni ottime alternative]

se  $\tilde{\underline{r}}_1 > 0$  la base non è ottima [ per  $\delta < -\frac{1}{6}$  ], va portato in base  $x_2$  con il metodo del semplice.

p. costruzione del problema duale

$$T_i = \left[ \begin{array}{ccccccc|c} & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \varphi & \mathbf{t. \ noti} \\ \hline & & 2 & & 1 & 0 & & & \\ & 0 & & 3 & & 1 & 0 & 0 & \\ & 4 & 4 & 5 & & 0 & & 0 & \\ \hline & 18 & & 33 & 0 & & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\underline{c}^T = [-18, -18, -33]$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 33 \\ 32 \\ 73 \end{bmatrix}$$



I vincoli diventano:

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_1 = 33$$

$$x_2 + 3x_3 + s_2 = 32$$

$$4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + s_3 = 73$$

sarà

$$\underline{b}^T = [33, 32, 73]$$

$$-A^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & -4 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} -18 \\ -18 \\ -33 \end{bmatrix}$$

e quindi risulta il problema duale:

$$\min 33y_1 + 32y_2 + 73y_3$$

$$\text{s.a } -3y_1 - 4y_3 \leq -18$$

$$-2y_1 - y_2 - 4y_3 \leq -18$$

$$-2y_1 - 3y_2 - 5y_3 \leq -33$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$