

PROBLEMA 2

ALGORITMO DEL SIMPLESSO E ANALISI DI SENSITIVITÀ

Un'officina meccanica produce pezzi di ricambio per trattori. I vari ricambi possono essere raggruppati in cinque tipi, ognuno dei quali richiede un certo tempo di lavorazione su vari macchinari. Il tempo (in ore) richiesto da ciascun pezzo su ciascuna macchina, il profitto (in euro), derivante dalla produzione di ciascun pezzo, ed il tempo macchina, disponibile nel prossimo mese, sono indicati in tabella:

	1	2	3	4	5	Ore disponibili
Fresatura	2	1.5	1	1	2	200
Taglio	1	2	2.5	2	1	80
Ispezione	2	1	2	1,5	2.5	100
Profitto	100	60	90	80	60	

a. costruire il modello matematico e scriverlo in forma standard

b. in riferimento alla base formata dalle variabili s_1, x_1, s_3
calcolare il tableau associato senza utilizzare l'algoritmo del
simplexso, sapendo che l'inversa della base è

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

c. la s.b. associata a tale base è ammissibile ?

la s.b. associata a tale base è ottima ?

qual è il valore della f.o.?

d. quale metodo occorre applicare per determinare la
soluzione di base ammissibile ottima?

Eseguire i calcoli determinando il tableau dell'ottimo

In relazione alla soluzione ottima :

e. cosa accade alla s.b.a.o. se le ore disponibili per la fresatura diminuiscono da 200 a 100, b_1 100? calcolare la nuova s.b.a.o.

f. cosa accade alla s.b.a.o. se le ore disponibili per il taglio aumentano da 80 a 110, $b_2 = 110$? calcolare la nuova s.b.a.o.

g. per quali valori di b_3 si ottiene una soluzione degenera?

h. per quali valori di p_1 la s.b. associata alla base conserva l'ottimalità?

i. per quale valore di p_3 è possibile migliorare il profitto?

l. per quale valore di p_4 si ottengono soluzioni ottime alternative?

RISOLUZIONE

a.

Il modello matematico è:

$$\begin{aligned} \max \omega &= 100x_1 + 60x_2 + 90x_3 + 80x_4 + 60x_5 \\ \text{s. a} \quad &2x_1 + 1.5x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 200 \\ &x_1 + 2x_2 + 2.5x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 80 \\ &2x_1 + x_2 + 2x_3 + 1.5x_4 + 1.5x_5 \leq 100 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

In forma di minimo

$$\begin{aligned} \min \varphi &= -100x_1 - 60x_2 - 90x_3 - 80x_4 - 60x_5 \\ \text{s. a} \quad &2x_1 + 1.5x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 200 \\ &x_1 + 2x_2 + 2.5x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 80 \\ &2x_1 + x_2 + 2x_3 + 1.5x_4 + 1.5x_5 \leq 100 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

In forma standard

$$\begin{aligned} \min \varphi &= -100x_1 - 60x_2 - 90x_3 - 80x_4 - 60x_5 \\ \text{s. a} \quad &2x_1 + 1.5x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + s_1 = 200 \\ &x_1 + 2x_2 + 2.5x_3 + 2x_4 + x_5 + s_2 = 80 \\ &2x_1 + x_2 + 2x_3 + 1.5x_4 + 1.5x_5 + s_3 = 100 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Tableau iniziale

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	φ	t. noti
T =	2	1.5	1	1	2	1	0	0	0	200
	1	2	2.5	2	1	0	1	0	0	80
	2	1	2	1.5	1.5	0	0	1	0	100
	100	60	90	80	60	0	0	0	1	0

b.

Nota l'inversa della base e le variabili di base del tableau associato alla B^{-1} data, si ha

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	φ	
$T_f =$	0					1	-2	0	0	
	1					0	1	0	0	
	0					0	-2	1	0	
	0					0		0	1	

Si devono determinare le due colonne relative alle variabili decisionali x_2 e x_3 , i coefficienti di costo relativo, il vettore soluzione x_B ed il valore della funzione.

Calcolo delle due prime colonne del tableau

$$B^{-1}[\underline{x_2}, \underline{x_3}, \underline{x_4}, \underline{x_5}] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5/2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3/2 & 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 3/2 & 5/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 3/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_B^T B^{-1} = (0, 0, -50)$$

$$\begin{aligned} \underline{f}_N &= \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T = \\ [0, 0, -100] &\begin{bmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & 3/2 & 5/4 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1 & 3/4 & 3/4 & 1 \end{bmatrix} - [-60, -90, -80, -60, 0] \\ \underline{f}_N &= [0, 10, -10, 5, -15, -50] \end{aligned}$$

$$\underline{x}_B = B^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 80 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} = [0, 0, -50] \begin{bmatrix} 200 \\ 80 \\ 100 \end{bmatrix} = -5000$$

Pertanto il tableau risulta

$$T = \left[\begin{array}{ccccccccc|c} & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \mathbf{x}_5 & \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \varphi & \\ \hline & 0 & 1/2 & -1 & -1/2 & 1/2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ & 0 & 3/2 & 3/2 & 5/4 & 1/4 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 30 \\ & 1 & 1/2 & 1 & 3/4 & 3/4 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 50 \\ \hline & 0 & 10 & -10 & 5 & -15 & 0 & 0 & -50 & 1 & -5000 \end{array} \right]$$

Si osserva che

c. la s.b. associata a tale base è ammissibile, in quanto tutti i termini del vettore \underline{x}_B sono non negativi la s.b. associata a tale base non è ottima in quanto vi sono coefficienti di costo positivi il valore della f.o. è $\varphi = -5000$

d. il metodo che occorre applicare per determinare la soluzione di base ammissibile ottima è l'algoritmo del simplesso primale

Selezionata x_1 quale variabile da portare in base, l'elemento pivot è $3/2$, quindi si ha:

$$\bar{r}_2 = \frac{2}{3}r_2 \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 20 \end{array}$$

$$\bar{r}_1 = r_1 - \frac{1}{2}\bar{r}_2 \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{12} & \frac{5}{12} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & 0 & 90 \end{array}$$

$$\bar{r}_3 = r_3 - \frac{1}{2}\bar{r}_2 \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 40 \end{array}$$

$$\bar{r}_0 = r_0 - 10\bar{r}_2 \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & -20 & -\frac{10}{3} & -\frac{50}{3} & 0 & -\frac{20}{3} & -\frac{140}{3} & 1 & -5200 \end{array}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -5/6 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Il tableau risulta

$$T = \left[\begin{array}{ccccccccc|c|c} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \mathbf{x_4} & \mathbf{x_5} & \mathbf{s_1} & \mathbf{s_2} & \mathbf{s_3} & \varphi & \mathbf{t. noti} \\ \hline 0 & 0 & -3/2 & -11/2 & 5/12 & 1 & -1/3 & -5/6 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 1 & 5/6 & 1/6 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/3 & 2/3 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 40 \\ \hline 0 & 0 & -20 & -10/3 & -50/3 & 0 & -20/3 & -140/3 & 1 & -5200 \end{array} \right]$$

Valori ottimi delle v. decisionali

Il profitto massimo derivante dalla produzione mensile viene massimizzato producendo

- 10 unità mensili di pezzi di ricambio P_1
- 0 unità mensili di pezzi di ricambio P_2

e non attivando la produzione dei pezzi di ricambio P_3, P_4, P_5

Il livello del profitto riferito a ciascun mese è di 5200€

Stato delle risorse nella soluzione ottima $s_1 = 90, s_2 = 0, s_3 = 0$

Vi sono delle eccedenze della prima risorsa, cioè delle ore -macchina relative alla fresatura dei pezzi di ricambio mentre non vi sono eccedenze della seconda e della terza risorsa.

In relazione alla soluzione ottima trovata al punto e

e. Variazione della risorsa R_1 (ore di fresatura)

se il valore di b_1 passa da 200 a 100

$$\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -5/6 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix}$$

i valori non sono tutti positivi, quindi la soluzione non è più ammissibile, ed il valore della f.o. è invariato

$$\varphi = -5200$$

$$\omega = 5200$$

per ripristinare l'ammissibilità si deve applicare l'algoritmo del simplesso duale

$$T_i = \begin{array}{c|cccccccc|c|c} & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \mathbf{x}_5 & \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \varphi & \mathbf{t. \ noti} \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3/2 & -11/12 & 5/12 & 1 & -1/3 & -5/6 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 5/6 & 1/6 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/3 & 2/3 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 40 \\ \hline 0 & 0 & -20 & -10/3 & -50/3 & 0 & -20/3 & -140/3 & 1 & -5200 \end{array}$$

Pivot l'elemento $a_{14} = -11/12$, quindi entra in base x_4 ed esce di base s_1

$$T_f = \begin{array}{c|cccccccc|c|c} & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \mathbf{x}_5 & \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \varphi & \mathbf{t. \ noti} \\ \hline 0 & 0 & 18/11 & 1 & -5/11 & -12/11 & -4/11 & -10/11 & 0 & 0 & 120/11 \\ 0 & 1 & -4/11 & 0 & 6/11 & 10/11 & \dots & \dots & 0 & 0 & 120/11 \\ 1 & 0 & 41/25 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 400/11 \\ \hline 0 & 0 & -291/20 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & -56800/11 \end{array}$$

Valori ottimi delle v. decisionali

Il profitto massimo derivante dalla produzione con la variazione della disponibilità delle ore di fresatura mensile viene massimizzato producendo

- circa 36 ($\approx 400/11$) unità mensili di pezzi di ricambio P_1
- circa 11 ($\approx 120/11$) unità mensili di pezzi di ricambio P_2
- circa 11 ($\approx 120/11$) unità mensili di pezzi di ricambio P_4

e non attivando la produzione dei pezzi di ricambio P_3, P_5

Il livello del profitto riferito a ciascun mese è di circa 5163€

Stato delle risorse nella soluzione ottima $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0$

Non vi sono eccedenze di alcuna risorsa.

f. Variazione della risorsa R_2 (ore di taglio)

cosa accade alla s.b.a.o. se il valore di b_2 passa da 80 a 110 ?
calcolare la nuova s.b.a.o.

$$\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -5/6 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 110 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

i valori sono tutti positivi, quindi la soluzione è ancora ammissibile, il valore della f.o. è

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{e}_2 \delta = -5200 + [0, -20/3, -140/3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta$$

$\delta = 30$ quindi

$$\tilde{\varphi} = -5200 - 20/3(30) = -5200 - 200 = -5400 \quad \tilde{\omega} = 5400$$

il nuovo tableau risulta

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	φ	t. noti
T =	0	0	-3/2	-11/2	5/12	1	-1/3	-5/6	0	80
	0	1	1	5/6	1/6	0	2/3	-1/3	0	40
	1	0	1/2	1/3	2/3	0	-1/3	2/3	0	30
	0	0	-20	-10/3	-50/3	0	-20/3	-140/3	1	-5400

Valori ottimi delle v. decisionali

Il profitto massimo derivante dalla produzione con la variazione della disponibilità delle ore di fresatura mensile viene massimizzato producendo

- circa 30 unità mensili di pezzi di ricambio P_1
- circa 40 unità mensili di pezzi di ricambio P_2

e non attivando la produzione dei pezzi di ricambio P_3, P_4, P_5

Il livello del profitto riferito a ciascun mese è di circa 5400€

g. Variazione della risorsa R_3 (tempo di ispezione)

calcolo dei valori di b_3 per i quali si ottiene una soluzione degenera

$$\tilde{b}_3 = b_3 + \delta$$

$$\tilde{x}_B = \underline{x}_B + B^{-1} \underline{e}_3$$

$$\tilde{x}_B = \begin{bmatrix} 90 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \delta = \begin{bmatrix} 90 - \frac{5}{6}\delta \\ 20 \dots\dots\dots \\ 40 \dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

perché ci sia degenerazione almeno una componente della soluzione x_B deve essere nulla, quindi $90 + -\frac{5}{6}\delta = 0 \Rightarrow \delta = -\dots\dots\dots$ e quindi $b_3 = 100 - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

h. calcolo dei valori di p_1 per i quali si conserva l'ottimalità

p_1 è relativa alla terza variabile di base, quindi una sua variazione influirà sui coefficienti di costo ridotto e sul valore della funzione.

$$\tilde{p}_1 = 100 + \delta$$

$$\tilde{c}_1 = -10 - \delta$$

$$\tilde{r}_N^T = [-20, -10/3, -50/3, -20/3, -140/3] - [1/2, 1/3, 2/3, -1/3, 2/3]\delta$$

Affinché si conservi l'ottimalità deve risultare

$$\tilde{r}_3 = \left[-20 - \frac{1}{2}\delta \right] \leq 0 \rightarrow \delta \geq -40$$

$$\tilde{r}_4 = \left[-\frac{10}{3} - \frac{1}{3}\delta \right] \leq 0 \rightarrow \delta \geq -10$$

$$\tilde{r}_5 = \left[-\frac{50}{3} - \frac{2}{3}\delta \right] \leq 0 \rightarrow \delta \geq -25$$

$$\tilde{r}_7 = \left[-\frac{20}{3} + \frac{1}{3}\delta \right] \leq 0 \rightarrow \delta \leq 20$$

$$\tilde{r}_8 = \left[-\frac{140}{3} - \frac{2}{3}\delta \right] \leq 0 \rightarrow \delta \geq -70$$

$$\text{e quindi, quindi } \tilde{p}_1 \geq 100 - 10 \text{ e } \tilde{p}_1 \leq 100 + 20 \dots\dots$$

$$\dots\dots \tilde{\varphi} \dots\dots$$

$$\dots\dots \tilde{\omega} \dots\dots$$

i. calcolo dei valori di p_3 per i quali la variabile x_2 può entrare in base.

In una tale circostanza dovendo eseguire un altro passo dell'algoritmo del simplesso primale si avrà un miglioramento della f.o.

p_3 è relativa alla variabile x_3 variabile non di base, quindi una sua variazione influirà sul corrispondente coefficiente di costo ridotto

$$\tilde{p}_3 = 90 + \delta \quad \text{quindi}$$

$$\tilde{r}_3 = -20 + \delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq 20$$

$$\text{e } \tilde{p}_3 \geq 110$$

I. calcolo dei valori di p_4 per i quali si ottengono soluzioni ottime alternative
analogamente

$$\tilde{p}_4 = 80 + \delta \quad \text{quindi}$$

$$\tilde{r}_4 = -10/3 + \delta = 0 \Rightarrow \delta = +10/3$$

e $\tilde{p}_4 = 250/3$