

ESERCIZI

A - METODO GRAFICO

1 A -

Risolvere con il metodo grafico il seguente modello di programmazione lineare

$$\max \omega = 10x_1 + 20x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_2 \leq 15 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 + x_2 \leq 45 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2 A -

Risolvere con il metodo grafico il seguente modello di programmazione lineare

$$\max \omega = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & 3/2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3/4x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3 A -

Risolvere con il metodo grafico il seguente modello di programmazione lineare

$$\min \phi = -2x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ & x_1 + x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 44 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4 A -

Risolvere con il metodo grafico il seguente modello di programmazione lineare

$$\max \omega = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & -2x_1 - x_2 = -8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

B - MODELLI

1 B -

Una azienda di pesce surgelato acquista merluzzo fresco da cui produce bastoncini impanati che rivende come surgelati. Supponiamo che il processo produttivo non comporti scarti, in pratica il 100% del pesce è trasformato in prodotto. Il prezzo di acquisto del pesce dipende dal mese ed è dato da 50, 45, 60, 70 euro al quintale rispettivamente per i mesi 1, 2, 3 e 4; il prezzo di vendita dei bastoncini è di 250 euro al quintale e il costo per la trasformazione e il surgelamento è di 25 euro al quintale, e non dipendono dal mese in cui sono prodotti e venduti. Il prodotto che non è venduto alla fine del mese, è mantenuto nel magazzino surgelatore. Il costo per mantenere un quintale di bastoncini in magazzino è di 6 euro per mese. La capacità di trasformazione della fabbrica è di 150 quintali al mese, la capacità massima del magazzino è di 80 quintali. Sia nota la domanda del mercato quantificabile in 100, 70, 150 e 200 quintali di bastoncini di pesce nei mesi 1, 2, 3 e 4. Si formuli il problema di pianificare l'attività di trasformazione in modo da massimizzare il profitto dell'azienda.

2 B -

Una ditta produce un modello di trapano in due diversi stabilimenti A e B. La produzione di un trapano richiede 1.5 ore di lavorazione in A e 2 ore di lavorazione in B. I costi di produzione per ogni trapano sono di 40 Euro nello stabilimento A e di 35 Euro nello stabilimento B. La capacità produttiva massima di A è di 420 ore mensili, mentre quella di B è di 400. Le richieste del mercato sono di 300 unità al termine del primo mese, di 400 unità al termine del secondo mese e di 500 unità al termine del terzo mese. Il costo di giacenza è di 10 Euro in ciascuno stabilimento. La giacenza iniziale è di 200 pezzi, e non vi sono vincoli sulla giacenza finale.

- Formulare il problema di determinare il piano di produzione dei prossimi 3 mesi che minimizza i costi di produzione e di giacenza in termini di Programmazione Lineare.
- Supponendo di dover inviare i trapani prodotti a un unico distributore che provvede all'immissione sul mercato e che il costo di trasporto è di 1 Euro per trapano per lo stabilimento A e di 2 Euro per trapano per lo stabilimento B, come si modifica la formulazione del problema?

3 B -

Un'azienda alimentare acquista pomodori (A) e produce: pelati (B), passata (C) e sugo condito (D). Il costo di ogni unità di A è 3. Il processo produttivo può essere schematizzato in due linee:

- da 10 unità di A sono prodotte 4 unità di B e 1 unità di C, a costo 1;
- da 10 unità di A sono prodotte 5 unità di D e 1 unità di C, a costo 2;

Il mercato è in grado di assorbire 400 unità di B, 100 unità di C e 500 unità di D, con un prezzo di vendita unitario di 20, 5 e 30 rispettivamente per B, C e D. Tutto ciò che è prodotto in eccesso è regalato ad associazioni umanitarie.

Fornire un modello di programmazione lineare che formuli il problema di pianificare la produzione con l'obiettivo di massimizzare il profitto dell'azienda. (suggerimento: identificare le variabili decisionali).

C-ALGORITMO DEL SIMPLESSO

1 C -

Si consideri il seguente modello di programmazione lineare

$$\min \varphi = -x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + 3x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- si esegua l'analisi grafica per identificare i punti soluzione per questo modello
- si calcolino i valori della funzione obiettivo in tali punti individuando così il valore ottimo
- si applichi l'algoritmo del **simplessso** per risolvere il modello

2 C -

Si consideri il seguente modello di programmazione lineare

$$\max \omega = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 \leq 14$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- si esegua l'analisi grafica per identificare i punti soluzione per questo modello
- si calcolino i valori della funzione obiettivo in tali punti individuando così il valore ottimo
- si applichi l'algoritmo del **simplessso** per risolvere il modello

3 C -

Si consideri il seguente modello di programmazione lineare

$$\max \omega = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- si esegua l'analisi grafica per identificare i punti soluzione per questo modello
- si calcolino i valori della funzione obiettivo in tali punti individuando così il valore ottimo
- si applichi l'algoritmo del **simplessso** per risolvere il modello

4 C -

Si consideri il seguente modello di programmazione lineare

$$\max \omega = -x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 - 10x_2 \leq 5$$

$$x_1 - 2x_2 \geq -3$$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- si esegua l'analisi grafica per identificare i punti soluzione per questo modello
- si applichi l'algoritmo del **simplessso** per risolvere il modello, calcolando i valori della funzione obiettivo nei vertici della r. a. individuando il valore ottimo

5 C -

Si consideri il seguente modello di programmazione lineare

$$\max \omega = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- si esegua l'analisi grafica per identificare i punti soluzione per questo modello
- si calcolino i valori della funzione obiettivo in tali punti individuando così il valore ottimo
- si applichi l'algoritmo del **simplessso** per risolvere il modello

6 C -

Si consideri il seguente modello di programmazione lineare

$$\max \omega = x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 2x_1 - x_2 \leq 4$$

$$-2x_1 - x_2 = -8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- si esegua l'analisi grafica per identificare i punti soluzione per questo modello
- si calcolino i valori della funzione obiettivo in tali punti individuando così il valore ottimo
- si applichi l'algoritmo del **simplexso** per risolvere il modello

7C -

Si consideri il seguente modello di programmazione lineare e si risolva applicando l'algoritmo del simplexso:

$$\min \phi = -2x_1 - 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

8 C -

Si consideri il seguente modello di programmazione lineare e si risolva applicando l'algoritmo del simplexso:

$$\min \phi = 5x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + x_3 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

9 C -

Si consideri il seguente modello di programmazione lineare e si risolva applicando l'algoritmo del simplexso:

$$\min \phi = 2x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\text{s.a} \quad x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 1$$

$$-2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

10 C -

Si consideri il seguente modello di programmazione lineare e si risolva applicando l'algoritmo del simplexso:

$$\min \phi = 5x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.a} \quad x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 18$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 7$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

11 C -

Sia dato il seguente programma lineare :

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	ϕ	b
2	1	0	-1	1	0	0	-2
1	-1	0	-1	0	1	0	2
-2	1	1	2	0	0	0	3
-3	1	0	2	0	0	1	4

Quale è il vertice primale corrispondente alla tabella data?

E' un punto di massimo?

D - ANALISI DI SENSITIVITÀ

1 D -

Sia dato il seguente problema di P-L

$$\begin{aligned} \max \omega &= 4x_1 + 2x_2 \\ \text{s. a} \quad &2x_1 \leq 16 \\ &x_1 + 3x_2 \leq 17 \\ &x_2 \leq 5 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

si denotino con s_1, s_2, s_3 le variabili scarto dei tre vincoli funzionali.

Si determini

1. il tableau dell'ottimo conoscendo la soluzione di base ammissibile (s.b.a.) individuata dalle variabili di base x_1, x_2 ed s_3 e la

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. le equazioni che identificano la soluzione di base ottima

2 D -

Sia dato il seguente problema di P-L

$$\begin{aligned} \min \varphi &= -3x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{s. a} \quad &2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ &2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

si denotino con s_1, s_2, s_3 le variabili scarto dei tre vincoli funzionali.

Si determini

1. il tableau dell'ottimo conoscendo la soluzione di base ammissibile (s.b.a.) individuata dalle variabili di base x_1, x_3 , ed s_3 e la

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. le equazioni che identificano la soluzione di base ottima

3 D -

Sia dato il seguente problema di P-L

$$\begin{aligned} \max \omega &= x_1 + 4x_2 \\ \text{s. a} \quad &x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ &5x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ &x_1 \leq 2 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Si effettui l'analisi di sensitività su b_1, b_2, b_3, c_1, c_2 .

4 D -

Sia dato il seguente problema di P-L

$$\begin{aligned} \max \omega &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s. a} \quad &2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ &4x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Si effettui l'analisi di sensitività del coefficiente di x_2 nella funzione obiettivo

2. Si effettui l'analisi di sensitività del termine noto del primo vincolo b_1 determinando l'intervallo di stabilità, la nuova soluzione e l'eventuale variazione della funzione
3. Si dica come varia la soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo b_2 assume il valore 45
4. Come cambierebbe la soluzione ottima se si aggiungesse una nuova variabile di base x_3 , con coefficiente 3 nella f.o. e tale da modificare i vincoli funzionali primo e secondo come segue

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 18$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 \leq 38$$

5 D -

Si consideri il seguente modello di programmazione lineare

$$\max w = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Si determini la soluzione ottima ed il valore ottimo della funzione.
2. Si determini l'intervallo di valori entro cui può variare il coefficiente di costo c_2 relativo alla variabile x_2 , affinché la soluzione determinata rimanga ottima
Se si sceglie c_2 maggiore dell'estremo superiore dell'intervallo sopra determinato, qual è la variabile che deve entrare in base?
3. Si determini l'intervallo entro cui può variare il termine noto del secondo vincolo b_2 affinché la base rimanga ottima.
4. Si supponga di inserire una nuova variabile x_3 con colonna dei coefficienti $A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e coefficiente di costo $c_3 = 4$. L'inserimento di questa nuova variabile consente di ottenere un vantaggio ?

E - PROBLEMA DUALE

1 E -

Sia dato il seguente problema di P-L

$$\begin{aligned} \min \varphi &= -2x_1 - x_2 \\ \text{s. a} \quad &x_1 - x_2 \leq 3 \\ &2x_1 + x_2 \leq 8 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

costruire il modello duale e confrontare le soluzioni determinate dalla risoluzione dei due modelli primale e duale

2 E -

Sia dato il seguente problema di P-L

$$\begin{aligned} \min \varphi &= -x_1 - 3x_2 \\ \text{s. a} \quad &x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ &-x_1 + x_2 \leq 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) risolvere graficamente

b) costruire il problema duale e determinarne graficamente le soluzioni

E3 -

Sia dato il seguente problema di P-L

$$\begin{aligned} \max \omega &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s. a} \quad &-x_1 + x_2 \leq -2 \\ &4x_1 + x_2 \leq 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) risolvere graficamente

b) costruire il problema duale e determinarne graficamente le soluzioni

E 4 -

Sia dato il seguente problema di P-L

$$\begin{aligned} \max \omega &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. a} \quad &3x_1 + 2x_2 \leq 200 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 100 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) risolvere graficamente

b) costruire il problema duale e determinarne graficamente le soluzioni

E5 -

Sia dato il seguente problema di P-L

$$\begin{aligned} \min \varphi &= -x_1 - 3x_2 \\ \text{s. a} \quad &x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ &-x_1 + x_2 \leq 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) risolvere graficamente

b) costruire il problema duale e determinarne graficamente le soluzioni

F-SIMPLESSO DUALE

1 F -

Sia dato il seguente problema di P-L

$$\begin{array}{ll}\min \varphi = & x_1 + x_2 \\ \text{s. a} & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

risolverlo con l'algoritmo del simplesso primale e l'algoritmo del simplesso duale.

Specificare quante sono le soluzioni ottimali e indicare le coordinate dei vertici del primale e del duale, ammissibili e no, rappresentati da ogni tableau.

2 F -

Sia dato il seguente problema di P-L

$$\begin{array}{ll}\max \omega = & x_1 + x_2 \\ \text{s. a} & x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

risolverlo con l'algoritmo primale e l'algoritmo duale del simplesso.

Specificare quante sono le soluzioni ottimali e indicare le coordinate dei vertici del primale e del duale, ammissibili e no, rappresentati da ogni tableau.

3 F -

Sia dato il seguente problema di P-L

$$\begin{array}{ll}\max \omega = & -5x_1 - 2x_2 \\ \text{s. a} & x_1 + x_3 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

risolverlo con l'algoritmo primale e l'algoritmo duale del simplesso.

*G- P-L INTERA
METODO DI BRANCH & BOUND E
METODO DEI PIANI DI TAGLIO*

1 G -

Sia dato il seguente problema di P-L-I

$$\begin{array}{ll} \min \varphi = & x_1 + x_2 \\ \text{s. a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ & 12x_1 + 15x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e intere} \end{array}$$

si risolva con il metodo di Branch and Bound

2 G-

Si risolva il seguente problema di P-L -I con il metodo di Branch and Bound

$$\begin{array}{ll} \max \omega = & 5x_1 + 8x_2 \\ \text{s. a} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e intere} \end{array}$$

3 G-

Si risolva il seguente problema di P-L -I con il metodo di Branch and Bound

$$\begin{array}{ll} \max \omega = & x_2 \\ \text{s. a} & -x_1 + x_2 \leq 1/2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3/2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e intere} \end{array}$$

4 G -

Si risolva il seguente problema di P-L -I con il metodo di Branch and Bound

$$\begin{array}{ll} \max \omega = & -x_1 + 5x_2 \\ \text{s. a} & x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e intere} \end{array}$$

5 G -

Sia dato il seguente problema di P-L-I

$$\begin{array}{ll} \min \varphi = & -21x_1 - 11x_2 \\ \text{s. a} & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e intere} \end{array}$$

si risolva con il metodo dei piani dei tagli di Gomory

6 G -

Sia dato il seguente problema di P-L-I

$$\begin{array}{ll} \max \omega = & x_1 + 2x_2 \\ \text{s. a} & 10x_1 + 4x_2 \leq 35 \\ & 2x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e intere} \end{array}$$

si risolva con il metodo dei piani dei tagli di Gomory

7 G -

Sia dato il seguente problema di P-L-I

$$\max \omega = 2x_1 - x_2$$

$$\text{s. a} \quad 0,5x_1 + x_2 \leq 1,5$$

$$x_1 - x_2 \leq 2,5$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e intere}$$

si risolva con il metodo dei piani dei tagli di Gomory

8 G -

Sia dato il seguente problema di P-L-I

$$\max \omega = 5x_1 + x_2$$

$$\text{s. a} \quad -x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$4x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e intere}$$

si risolva con il metodo dei piani dei tagli di Gomory

9 G-

Rappresentare graficamente il P- L-I

$$\max \omega = x_1 - x_2$$

$$\text{s. a} \quad x_1 - x_2 \leq 3/2$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e intere}$$

Senza far uso del grafico precedentemente tracciato, risolvere il problema utilizzando l'algoritmo di Gomory,