METODO DEL SIMPLESSO DUALE

L'algoritmo del simplesso duale si usa

1. nella risoluzione di problemi primali in cui l'ottimalità sia già soddisfatta (coefficienti di costo relativo di v.n.b. negativi), ma non l'ammissibilità.

2. nel caso di inammissibilità derivanti nei casi di :
   a) analisi di sensitività (variazione di un termine b o aggiunta di un nuovo vincolo)
   b) soluzione di problemi con vincoli di interezza

3. nella risoluzione di problemi del trasporto e di assegnamento in cui si sviluppano algoritmi (più efficienti del metodo del simplesso) basati sul duale del problema

ESEMPIO 1.
Risoluzione di problemi primali in cui l'ottimalità sia già soddisfatta (coefficienti di costo relativo di v.n.b. negativi), ma non l'ammissibilità.

$$\begin{aligned} \min \varphi &= 200x_1 + 100x_2 \\ \text{s.a} \quad & 3x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

E' un problema con vincoli di ≥ che si potrebbe risolvere con l'algoritmo del simplesso (primale) iniziando dalla fase 1 della ammissibilità con la minimizzazione della f.o. artificale ψ e proseguendo con la fase 2.

Proviamo a risolverlo con **l'algoritmo del simplesso duale**

Trasformiamo i vincoli di ≥ in vincoli di ≤

$$\begin{aligned} \min \varphi &= 200x_1 + 100x_2 \qquad \varphi - \underline{200x_1 - 100x_2} = 0 \\ \text{s.a} \quad & -3x_1 - x_2 \leq -2 \\ & -2x_1 - 2x_2 \leq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	s_1	s_2	φ	
-3	-1	1	0	0	-2
-1	-2	0	1	0	-3
-200	-100	0	0	1	0

l'ottimalità è già soddisfatta, ma non l'ammissibilità come verifichiamo dalla colonna dei termini noti.

Per ripristinare l'ammissibilità, poichè entrambi i termini noti sono negativi, è indifferente quale riga selezionare.

Fissata la prima riga, si considerano tutti i rapporti tra i coefficienti di costo relativo ed i corrispondenti elementi (negativi) della prima riga.

$$\frac{-200}{-3} = \frac{200}{3} \quad < \quad \frac{-100}{-1} = 100$$ l'elemento "pivot" –3 quindi

$\bar{r}_1 = \frac{-1}{3} r_1 =$ 1 1/3 -1/3 0 0 2/3

$\bar{r}_2 = r_2 + 2\bar{r}_1$

-2	-2	0	1	0	-3
2	2/3	-2/3	0	0	4/3
0	-4/3	-2/3	1	0	-5/3

$\bar{r}_0 = r_0 + 200\bar{r}_1$

-200	-100	0	1	0	-3
200	200/3	-200/3	0	1	400/3
0	-100/3	-200/3	0	1	400/3

Il tableau sarà

x_1	x_2	s_1	s_2	φ	
1	1/3	-1/3	0	0	2/3
0	-4/3	-2/3	1	0	**-5/3**
0	-100/3	-200/3	0	1	400/3

Con un'ulteriore operazione di riga si eliminerà l'inammissibilità derivante dal valore negativo del secondo termine noto **-5/3**

Il pivot è il termine -4/3

$\bar{r}_1 = r_1 - \frac{1}{3}\bar{r}_2$	1	0	-1/2	1/4	0	1/4
$\bar{r}_2 = \frac{-3}{4} r_2$	0	1	1/2	-3/4	0	5/4
$\bar{r}_0 = r_0 + \frac{100}{3}\bar{r}_2$	0	-100/3	-200/3	0	1	400/3
	0	100/3	50/3	0	1	125/3
	0	0	-150/3	-100/4	1	525/3

Il tableau dell'ottimo ammissibile sarà

1	0	-1/2	1/4	0	1/4
0	1	1/2	-3/4	0	5/4
0	0	-50	-25	1	175

ESEMPIO 2.
Risoluzione di problemi con inammissibilità derivanti da analisi di sensitività (variazione di un termine $\underline{b}$ o aggiunta di un nuovo vincolo)

Si consideri il problema precedentemente analizzato

Max $\omega = 3x_1 + 5x_2$ min $\phi = -3x_1 - 5x_2$

s.a. $x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 24$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

Il tableau iniziale è

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ϕ	b
1	0	1	0	0	0	4
0	2	0	1	0	0	24
3	2	0	0	1	0	18
3	5	0	0	0	1	0

e dopo lo sviluppo dell'algoritmo del simplesso arrivati al valore ottimo della f.o. il tableau finale risulta

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ϕ	b
1	0	1	0	0	0	4
3/2	1	0	0	1/2	0	9
-3	0	0	1	-1	0	6
-9/2	0	0	0	-5/2	1	-45

Con la variazione di un elemento di $\underline{b}$ variano

1) $\mathbf{B^{-1}b}$ (determinazione delle v.b.) risulta $\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e_i}\delta$ sostituendo $\underline{\tilde{b}}$ a $\underline{b}$ nella partizione interessata si ha:

$B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}(\underline{b} + \underline{e_i}\delta) = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e_i}\delta$

$B^{-1}\underline{b} = x_B$

$B^{-1}\underline{e_i}$ = i-esima colonna inversa della base nel tableau finale, che si legge in corrispondenza di $\underline{e_i}$ nel tableau iniziale

$B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \tilde{x}_B = x_B + B^{-1}\underline{e_i}\delta = x_B + \Delta x_B$

<u>Se varia il termine noto del 2° vincolo si ha:</u>

$$\tilde{x}_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta \rightarrow \begin{vmatrix} 4 > 0 \\ 9 > 0 \\ 6 + \delta \geq 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 4 > 0 \\ 9 > 0 \\ \delta \geq -6 \end{vmatrix}$$

se fosse $\delta = -8$ risulterebbe

$$\tilde{x}_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ soluzione non ammissibile}$$

$$\tilde{\phi} = -45 + [0 \;\; 0 \;\; -5/2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta = -45$$

con ciò si deduce che la variazione di disponibilità della 2^ risorsa della quantità considerata viola l'ammissibilità dell'ottimo

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ϕ	b
1	0	1	0	0	0	4
3/2	1	0	0	1/2	0	9
-3	0	0	1	-1	0	**-2**
-9/2	0	0	0	-5/2	1	-45

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ϕ	b
0	0	1	1/3	-1/3	0	10/3
0	1	0	1/3	1	0	10
1	0	0	-1/3	1/3	0	2/3
0	0	0	-3/2	-1	1	-42

Con l'algoritmo duale si è ristabilita l'ammissibilità

ESEMPIO 3
Aggiunta di un nuovo vincolo

Con l'aggiunta di un nuovo vincolo $2x_1 + 3x_2 \leq 24$, si perde ancora una volta l' ammissibilità della soluzione ottima.

Il vincolo in termini di uguaglianza è $2x_1 + 3x_2 + s_4 = 24$, pertanto il tableau è:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ϕ	b
1	0	1	0	0	0	0	4
3/2	1	0	0	1/2	0	0	9
-3	0	0	1	-1	0	0	6
2	**3**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**24**
-9/2	0	0	0	-5/2	0	1	-45

Modificando la 4^ riga si ha:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ϕ	b
1	0	1	0	0	0	0	4
3/2	1	0	0	1/2	0	0	9
-3	0	0	1	-1	0	0	6
-5/2	0	0	0	-3/2	1	0	-3
-9/2	0	0	0	-5/2	0	1	-45

L'ultima riga resta invariata ,quindi l'ottimo si conserva, ma l'ammissibilità si perde, pertanto si ripristinerà col simplesso duale.

Fissata la 4^ riga, si considerano tutti i rapporti tra i coefficienti di costo relativo ed i corrispondenti elementi (negativi) della prima riga, e si ottiene l'elemento pivot che è –3/2 quindi entra in base s_3 ed esce s_4 ed applicando l'algoritmo del simplesso duale si ottiene il tableau

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	φ	
1	0	1	0	0	0	0	4
2/3	1	0	0	0	1/3	0	**8**
-4/3	0	0	1	0	-2/3	0	**8**
5/3	0	0	0	1	-2/3	0	**2**
-1/3	0	0	0	0	-5/3	1	-40