ALGORITMO DEL SIMPLESSO (b)

ESEMPIO 1

–Metodo delle due fasi -

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \Phi &= 15x_1 + 20x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Il problema espresso con le variabili scarto e surplus $\overline{s}_1,\ s_2,\ \overline{s}_3$ è :

$$\begin{aligned} \min \quad & \Phi - 15x_1 - 20x_2 = 0 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 - \overline{s}_1 = 10 \\ & 2x_1 - 3x_2 + s_2 = 6 \\ & x_1 + x_2 - \overline{s}_3 = 6 \\ & x_1, x_2, \overline{s}_1, s_2, \overline{s}_3 \geq 0 \end{aligned}$$

ed il relativo tableau è dato da:

	x_1	x_2	$\overline{s}_1$	s_2	$\overline{s}_3$		t. noti
	1	**2**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**10**
T =	**2**	**-3**	**0**	**1**	**0**	**0**	**6**
	1	**1**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**6**
f.ob.	**-15**	**-20**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

Si tratta di un problema con vincoli sia di ≥ che di ≤ e presenta una soluzione di **base iniziale** (0,0,-10,6,-6), cioè l'origine del piano x_1 x_2, che **<u>non è ammissibile</u>**

L'inammissibilità della soluzione iniziale è data dal valore negativo di $\overline{s}_1$ ed $\overline{s}_3$, pertanto va ricercata una soluzione di base ammissibile iniziale e tale ricerca viene ricondotta alla risoluzione di un altro problema "ausiliario" di P.L. che ammetterà sempre una soluzione di base ammissibile iniziale nota.

(*) in generale un qualsiasi problema può considerarsi nella forma generale

$$\begin{aligned} & \min \underline{c}^T \underline{x} \\ & \text{s.a. } A\,\underline{x} + \underline{s} = \underline{b} \\ & \quad \underline{x},\ \underline{s} \geq 0 \end{aligned}$$

per il quale si potrà supporre sempre b ≥ 0, senza perdere in generalità; infatti se per qualche vincolo i si avesse $b_i < 0$, sarebbe sufficiente moltiplicare per –1 entrambi i membri del vincolo stesso.

E' possibile segnalare l'inammissibilità introducendo ulteriori variabili (**artificiali o temporanee)** non negative t_i, per ogni vincolo del problema iniziale, definendo così il problema "ausiliario" attraverso i vincoli :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & - & \overline{s}_1 & & & + t_1 & =10 \\
2x_1 & - & 3x_2 & & & + s_2 & & & = 6 \\
x_1 & + & x_2 & & & & - \overline{s}_3 & + t_3 & = 6
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, \overline{s}_1, s_2, \overline{s}_3, t_1, t_3 \geq 0$$

se tali vincoli ammettono una soluzione ammissibile in cui tutte le variabili artificiali sono nulle, tale soluzione costituirà una soluzione ammissibile del problema iniziale.

A questo punto l'inammissibilità è rappresentata dalla funzione $\boldsymbol{\psi = t_1 + t_3}$ e per poterla eliminare si svilupperà una **fase 1** in cui si minimizzerà la funzione ψ, che rappresenta la f.o. (artificiale) del problema "ausiliario".

Una volta individuato il minimo della funzione ψ, se ne controllerà il valore:

se ψ
- $= 0$ si è giunti ad una s.b.a. per il problema originario
- > 0 non esiste una s.b.a. per il problema originario, non esiste s.a. per il problema originario e quindi la regione ammissibile è vuota

Fase 1

Ritornando al problema ausiliario, esso avrà il seguente modello:

$$\min \psi - \boldsymbol{t_1 - t_3 = 0}$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & - & \overline{s}_1 & & & + t_1 & =10 \\
2x_1 & - & 3x_2 & & & + s_2 & & & = 6 \\
x_1 & + & x_2 & & & & - \overline{s}_3 & + t_3 & = 6
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, \overline{s}_1, s_2, \overline{s}_3, t_1, t_3 \geq 0$$

da cui risulta

	x_1	x_2	$\overline{s}_1$	s_2	$\overline{s}_3$	t_1	t_3	ψ	b
r_1	**1**	**…**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**….**
r_2	**….**	**….**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**….**
r_3	**….**	**….**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**0**	**….**
r_0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**-1**	**1**	**0**

si può determinare sommando alla riga r_0 la1^ e la 3^ riga essendo $\boldsymbol{t_1}$ e $\boldsymbol{t_3}$ rispettivamente 1^ e 3^ variabile di base.

r_0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**-1**	**1**	**0**
r_1	**1**	**…**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**….**
r_3	**….**	**….**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**0**	**….**
$\overline{r}_0$									

o equivalentemente da inserire nel tableau

$$2x_1 + 3x_2 - \overline{s_1} - \overline{s_3} + \psi = 16$$

Il tableau iniziale della fase 1 (fase dell'ammissibilità) è:

	x_1	x_2	$\overline{s_1}$	s_2	$\overline{s_3}$	t_1	t_3	ψ	b
r_1	….	….	-1	0	0	1	0	0	…..
r_2	….	-…..	0	1	0	0	0	0	…..
r_3	…	….	0	0	-1	0	1	0	….
r_0	…..	…..	-1	0	-1	0	0	1	…..

Si comincia ad applicare il procedimento iterativo dell'algoritmo del simplesso sul problema "ausiliario".

1° passo entra in base x_2 ed esce t_1 elemento pivot è 2 (prima riga -seconda colonna)

$\overline{r_1} = \frac{1}{2} r_1$	1/2	1	-1/2	0	0	1/2	0	0	5

$\overline{r_2} = r_2 + 3\overline{r_1}$	2	-3	0	1	0	0	0	0	…..
	…..	….	-……	0	0	……	0	0	…..
	……	….	-…….	1	0	……	0	0	…..

$\overline{r_3} = r_3 - \overline{r_1}$	1	1	0	0	-1	0	1	0	6
	-……	-…	……	0	0	-….	0	0	-….
	…..	…	……	0	…..	-…..	…	0	….

$\overline{r_0} = r_0 - 3\overline{r_1}$	2	3	-1	0	-1	0	0	1	16
	-……	-…..	……	0	…..	-…..	0	0	-….
	……	…..	……	0	-….	-…..	0	1	….

Il tableau ora risulta:

	x_1	x_2	$\overline{s_1}$	s_2	$\overline{s_3}$	t_1	t_3	ψ	t. noti
r_1	…..	1	-….	0	0	…..	0	0	…
r_2	…..	0	-…..	1	0	….	0	0	…
r_3	….	0	…….	0	-1	-…..	1	0	….
r_0	**……**	**0**	**….**	**0**	**-1**	-…	**0**	**1**	**1**

$\Psi = 1$

2° passo entra in base $\overline{s_1}$ ed esce t_3 elemento pivot è 1/2 (terza riga –terza colonna)

$\overline{r_3} = 2r_3$	1	0	1	0	-2	-1	2	0	2

$\overline{r_2} = r_2 + \frac{3}{2}\overline{r_3}$

…..	0	……	1	0	……	0	0	….
…..	0	……	0	-…..	…….	….	0	….
….	0	0	1	-…	0	…	0	….

$\overline{r_1} = r_1 + \frac{1}{2}\overline{r_3}$

….	1	-…..	0	0	….	0	0	….
…..	0	…..	0	-….	-…..	1	0	….
..	…	0	0	-…	0	1	0	….

$\overline{r_0} = r_0 - \frac{1}{2}\overline{r_3}$

…..	0	….	0	-…..	-…..	0	..	…
-…..	…	-…..	0	…..	…..	-…..	0	-…
0	..	….	…..	…	-…	-..	..	0

Il tableau infine risulta:

	x_1	x_2	$\overline{s_1}$	s_2	$\overline{s_3}$	t_1	t_3	ψ	b
r_1	1	…	…	0	-…	0	….	0	….
r_2	…	…	…	…	-…	….	….	0	…..
r_3	….	…	…	…	-…	-….	….	0	….
r_0	…	….	….	...	…	-….	-…	1	….

$\Psi = 0$ e var. base (x_2, s_2, $\overline{s_1}$)

la soluzione ottima per il problema ausiliario è:

x_1= ….
x_2= ….
$\overline{s_1}$ = …
s_2= ……
$\overline{s_3}$ = ……

ed essa costituisce la s.b.a. per il problema originario.

Fase 2

$$\min \Phi = 15x_1 + 20 x_2$$

Il tableau iniziale è:

	x_1	x_2	$\overline{s_1}$	s_2	$\overline{s_3}$	φ	b
r_1	1	1	…	0	…	0	….
r_2	…	.. .	0	1	…	0	…
r_3	1	….	…	0	…	0	2
r_0	….	…..	….	0	0	1	….

Poiché $\mathbf{x_2}$ è una variabile di base e la f.o. deve essere espressa sempre in termini di v.n.b si determina la nuova della f.o. sommando alla riga r_0 $20r_1$.

$\overline{r_0} = r_0 + 20r_1$							
	-15	-20	0	0	0	1	0
	20	20	0	0	-20	0	120
	5	0	0	0	-20	1	120

Si ottiene

$$\ldots x_1 - \ldots.\ \overline{s_3} + \varphi = 120$$

Il tableau diventa:

	x_1	x_2	$\overline{s_1}$	s_2	$\overline{s_3}$	φ	b
r_1	1	…	.	0	…	0	….
r_2	…	…	…	1	…	0	….
r_3	1	…	1	0	…	0	. …
r_0	….	…	…	0	…	1	…..

La soluzione di base così determinata non è quella ottimale, giacchè il valore di un coefficiente di costo relativo è ancora positivo.
Questo significa che la soluzione di base corrente non è ottimale e che la v.n.b. x_1 è candidata ad entrare in base, dal momento che il relativo coefficiente di costo relativo è strettamente positivo.

Per introdurre la variabile x_1 nella base: dobbiamo applicare ancora la generica iterazione dell'algoritmo del simplesso.

1° passo entra in base x_1 ed esce $\overline{s_1}$ elemento pivot è 1 (terza riga -prima colonna)

$\overline{r_3} = r_3$	1	0	1	0	- 2	0	2
$\overline{r_2} = r_2 - 5\overline{r_3}$	5	0	0	1	-3	0	24
	-5	0	-5	0	10	0	-10
	0	0	-5	1	7	0	14
$\overline{r_1} = r_1 - \overline{r_3}$	1	1	0	0	-1	0	…
	-…	…	-….	…	…	…	-...
	…	…	-….	0	…	…	...

$\overline{r_0} = r_0 - 5\overline{r_3}$	5	0	0	0	-…	1	…
	-…	0	-…	0	…	0	-…
	…..	0	….	0	-….	1	…..

Il tableau infine risulta:

	x_1	x_2	$\overline{s_1}$	s_2	$\overline{s_3}$	φ	b
r_1	0	1	-…	0	…	0	….
r_2	0	0	-…	1	…	0	….
r_3	…	0	…	0	-…	0	…
r_0	0	0	-…	0	-….	1	….

I coefficienti di costo relativo sono tutti negativi quindi è determinato il minimo della f.o. φ = 110 in corrispondenza della s. b. a.

x_1 = …… **x_2 = …….** **s_2 = ……** φ = ……

che perciò sarà ottimale.

Graficamente si determina

- la r.a.

- le coordinate dei vertici e l'insieme delle variabili di base ad essi corrispondenti:

A $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$ intersezione di : $x_1 = 0$ e $\overline{s_3} = \mathbf{O}$ frontiere del vincolo di segno $x_1 \geq 0$ e del 3° vincolo "tecnico" $x_1 + x_2 \geq 6$ pertanto poiché relative a vincoli non attivi sono v.b. (x_2, $\overline{s_1}$, s_2)

B $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$ intersezione di : …………….

…………………………………………………………….
……………………………………… v.b .(x_1,……….)

C $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 2x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$ intersezione di : …………….

……………………………………………………………...
……………………………………… v.b .(................)

- la soluzione ottima

Sviluppare …

ESEMPIO 2

I vincoli espressi da equazioni non evidenziano l'inammissibilità, e per cominciare ci si pone sempre inizialmente nell'origine (s.b. iniziale), che però per i vincoli di uguaglianza è inammissibile.

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \max \omega & = x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

E' possibile segnalare l'inammissibilità introducendo ulteriori variabili (**artificiali o temporanee)** non negative t_i, per ogni vincolo del problema iniziale, definendo così il problema "ausiliario" attraverso i vincoli :

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + t_1 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + \quad + t_2 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, \geq 0 \end{array}$$

A questo punto l'inammissibilità è rappresentata dalla funzione $\boldsymbol{\psi = t_1 + t_2}$ e per poterla eliminare si svilupperà la fase 1 in cui si minimizzerà la funzione ψ, che rappresenta la f.o. (artificiale) del problema "ausiliario".

Fase 1

Ritornando al problema ausiliare, avrà il seguente modello:

$$\begin{array}{ll} \min \psi - \mathbf{t_1 - t_3 = 0} & \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 + x_3 + t_1 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + \quad t_2 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{array}$$

da cui risulta

	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	ψ	t. noti
r_1	1	2	1	1	0	0	3
r_2	2	-1	0	0	1	0	4
r_0	0	0	0	-1	-1	1	0

Sommando alla riga r_0 le righe r_1 ed r_2 si ottiene la nuova riga della f.o. espressa in termini di v.n.b.

r_1	1	2	1	1	0	0	3
r_2	2	-1	0	0	1	0	4
r_0	0	0	0	-1	-1	1	0
	3	1	1	0	0	1	7

La f.o. è

$$\dots\ x_1 + x_2 + x_3 + \psi = 7$$

Il tableau iniziale della fase 1 (fase dell'ammissibilità) è:

$$\begin{array}{c} \\ r_1 \\ r_2 \\ r_0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & t_1 & t_2 & \psi & \mathbf{t.\ noti} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \boxed{\mathbf{2}} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots. & \dots & \mathbf{1} & \dots. \end{array}\right] \end{array}$$

Si comincia ad applicare il procedimento iterativo dell'algoritmo del simplesso sul problema "ausiliario".

1° passo entra in base x_1 ed esce t_2 elemento pivot è 2 (seconda riga –prima colonna)

$$\overline{r_2} = \frac{1}{2} r_2 \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\overline{r_1} = r_1 - \overline{r_2} \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -\dots & \dots.. & \dots.. & \dots & -\dots. & \dots. & -\dots \\ \hline 0 & 5/2 & 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\overline{r_0} = r_0 - 3\overline{r_2} \qquad \begin{array}{ccccccc} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ -\dots & \dots\dots & \dots. & \dots & -\dots & 0 & -\dots \\ \hline \dots. & \dots\dots & \dots. & 0 & -\dots. & 1 & .. \end{array}$$

Il tableau ora risulta:

$$\begin{array}{c} \\ r_1 \\ r_2 \\ r_0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & t_1 & t_2 & \psi & \mathbf{b} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{\dots..} & \dots. & 1 & -1/2 & 0 & \dots.. \\ 1 & -\dots. & \dots & 0 & \dots\dots & 0 & \dots. \\ \hline 0 & \dots. & \dots & 0 & -\dots.. & 1 & \dots.. \end{array}\right] \end{array}$$

ψ = …

2° passo entra in base x_2 ed esce t_1 elemento pivot è 5/2 (prima riga –seconda colonna)

$$\overline{r_1} = \frac{2}{5} r_1 \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -1/5 & 0 & 2/5 \end{array}$$

$$\overline{r_2} = r_2 + \frac{1}{2}\overline{r_1} \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\ \dots & \dots. & \dots\dots & .. & -\dots & 0 & \dots \\ \hline \dots & \dots. & \dots & \dots & \dots. & 0 & \dots \end{array}$$

$\bar{r}_0 = r_0 - \frac{5}{2}\bar{r}_1$	**0**	**5/2**	**1**	**0**	-3/2	**1**	**1**
	0	-…..	-….	-…	….	0	-..
	0	**……**	**…..**	**-…..**	-…..	**…..**	**…**

Il tableau infine risulta:

$$
\begin{array}{c|cccccc|c|}
 & \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & t_1 & t_2 & \psi & \mathbf{b} \\
\hline
\mathbf{r_1} & 0 & 1 & \dots & \dots & -\dots & 0 & \dots \\
\mathbf{r_2} & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\
\hline
\mathbf{r_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & -1 & \mathbf{1} & \mathbf{0}
\end{array}
$$

$\Psi = 0$ e var. base ($\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_1}$,)
la soluzione ottima per il problema ausiliario è:

$x_1 = \dots\dots$
$x_2 = \dots..$
$x_3 = \dots\dots$
$\psi = \dots\dots$

ed essa costituisce la s.b.a. per il problema originario.

Fase 2

max ω = min Φ con $\omega = -\Phi$

min Φ $= -x_1 - 5x_2 - 3x_3$

Il tableau iniziale è:

$$
\begin{array}{c|cccc|c|}
 & \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \varphi & \mathbf{b} \\
\hline
\mathbf{r_1} & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\
\mathbf{r_2} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\
\hline
\mathbf{r_0} & \mathbf{\dots} & \mathbf{\dots} & \mathbf{..} & \mathbf{1} & \mathbf{0}
\end{array}
$$

La f.o. va espressa in termini delle v.n.b. quindi la nuova riga relativa ala f.o. si ottiene sommando alla $\mathbf{r_0}$ **-5** $\mathbf{r_1}$ e - $\mathbf{r_2}$ quindi si ottiene

$$4/5\, \mathbf{x_3} + \varphi \text{ -= } - \mathbf{21/5}$$

Il tableau diventa:

$$
\begin{array}{c|cccc|c|}
 & \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \varphi & \mathbf{b} \\
\hline
\mathbf{r_1} & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots\dots \\
\mathbf{r_2} & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\
\hline
\mathbf{r_0} & 0 & \mathbf{0} & \dots & 1 & -\dots\dots
\end{array}
$$

La soluzione di base così determinata non è quella ottimale, giacchè il valore di un coefficiente di costo relativo è ancora positivo.

Questo significa che la soluzione di base corrente non è ottimale e che la v.n.b. x_3 è candidata ad entrare in base, dal momento che il relativo coefficiente di costo relativo è strettamente positivo.

Per introdurre la variabile x_3 nella base: dobbiamo applicare ancora la generica iterazione dell'algoritmo del simplesso.

1° passo entra in base x_3 ed esce x_2 elemento pivot è 2/5 (prima riga- terza colonna)

$\bar{r}_1 = \frac{5}{2} r_1$	0	5/2	1	0	1
$\bar{r}_2 = r_2 - \frac{1}{5} \bar{r}_1$	1	0	1/5	0	11/5
	…	-….	-…..	0	-….
	…..	-…..	0	0	…..
$\bar{r}_0 = r_0 - \frac{4}{5} \bar{r}_1$	0	0	4/5	1	…..
	0	-…..	-……	0	-……
	0	-…..	0	1	-……

Il tableau infine risulta:

	x_1	x_2	x_3	φ	t. noti
r_1	0	……	….	0	….
r_2	….	-……	..	0	….
r_0	0	-…..	….	1	..

Il coefficiente di costo relativo della variabile $\mathbf{x_2}$ è negativo quindi la soluzione trovata è ottima

$\mathbf{x_1 = 2}$ $\mathbf{x_2 = 0}$ $\mathbf{x_3 = 1}$ $\varphi = -5$