METODO GRAFICO

Si applica quando ci sono due variabili decisionali.

a. Si definisce l'area da prendere in considerazione in base agli eventuali vincoli di non negatività
b. Si impongono i limiti ➔ si definisce l'insieme delle soluzioni accettabili
c. Si disegna il fascio di rette parallele associato alla funzione obiettivo
d. Si calcola il valore che la funzione obiettivo assume nei vertici (soluzioni accettabili di base)
e. Il valore richiesto per la funzione obiettivo (massimo o minimo) è associato alla soluzione ottimale

L'insieme dei punti che soddisfano i vincoli strutturali e di non negatività di un problema di programmazione lineare si chiama **regione ammissibile.**

La regione ammissibile di un problema di programmazione lineare con n variabili è un poliedro convesso ad n dimensioni. Nel caso in cui sia limitata è un politopo convesso n-dimensionale.

Fornita l'interpretazione geometrica della regione ammissibile, resta da determinare il significato della f.o. è opportuno ricordare la definizione di curve di livello (o contorno) di una funzione.

Le **curve di livello** di una funzione (obiettivo) rappresentano l'insieme dei punti sui quali la funzione assume un valore costante assegnato.

Quando in un problema la f.o. rappresenta un profitto da massimizzare o un costo da minimizzare, si fa riferimento alle curve di livello della funzione obiettivo con i termini di **isoprofitto** o di **isocosto**.
Per ricavare una rappresentazione grafica della funzione obiettivo nel caso bidimensionale (solo due sono le variabili decisionali), è sufficiente tracciare nel piano x_1x_2 le corrispondenti curve di livello che costituiscono un fascio di rette parallele, e tali curve crescono in una direzione ortogonale alle curve di livello stesse.

La regione ammissibile di un qualsiasi problema può contenere **infinite soluzioni** ammissibili, rappresentate dai punti interni e di frontiera del poliedro (poligono nel caso in 2 variabili decisionali)
In un problema di Programmazione Lineare, se esiste una soluzione ammissibile allora esiste sempre una soluzione ammissibile che è un vertice della regione ammissibile.

Se esiste una **soluzione ottimale**, allora esiste sempre una soluzione ottimale collocata su uno dei vertici della regione ammissibile.

ESEMPI

1.

Risolvere con il metodo grafico il problema di programmazione lineare:

$$\max \omega = -2x_1 + x_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\le 8 \\ x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ 5x_1 + x_2 &\ge 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

a.-b. Si rappresenta la regione ammissibile (cioè l'insieme delle soluzioni ammissibili osservando che:

- Le disequazioni $x_1 \ge 0$ e $x_2 \ge 0$ (vincoli di segno) sono soddisfatte da tutti i punti che sono nel 1° quadrante le cui coordinate x_1 e x_2 sono non negative

- La disequazione $2x_1 - x_2 \le 8 \rightarrow -x_2 \le -2x_1 + 8 \rightarrow x_2 \ge 2x_1 - 8$ è soddisfatta da tutti i punti al di sopra ($\ge$) della retta $x_2 = 2x_1 - 8$

- La disequazione $x_1 + 2x_2 \le 10 \rightarrow x_2 \le (-½)x_1 + 5$ è soddisfatta da tutti i punti al di sotto ($\le$) della retta $x_2 = (-½)x_1 + 5$

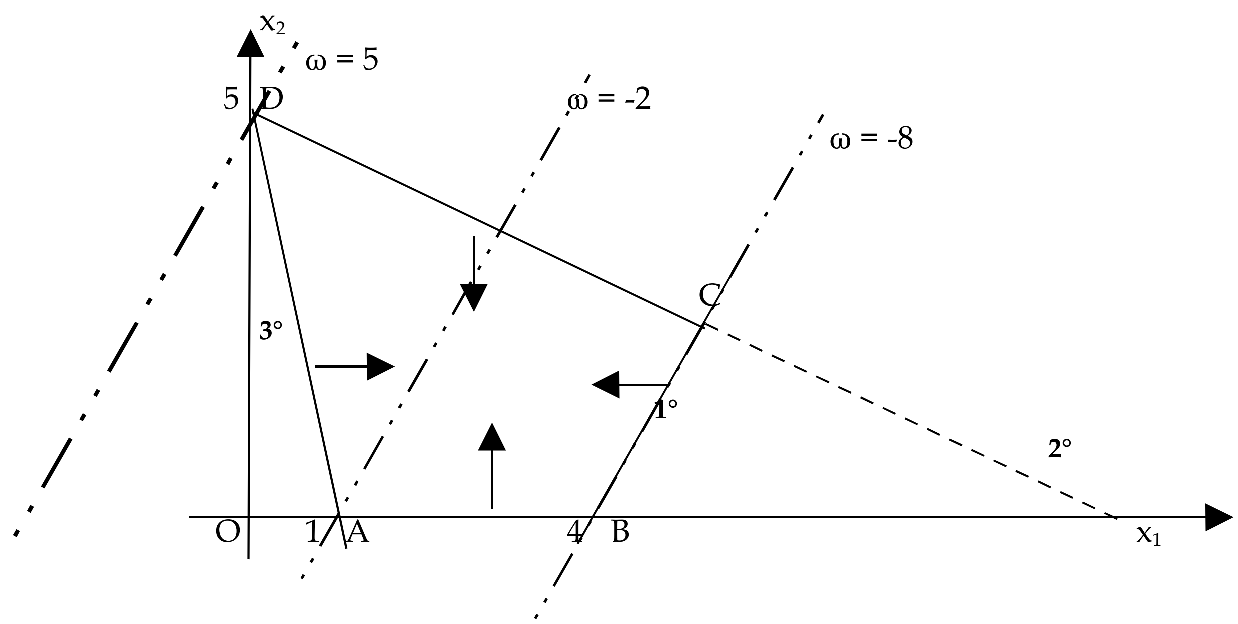
- La disequazione $5x_1 + x_2 \ge 5 \rightarrow x_2 \ge -5x_1 + 5$ è soddisfatta da tutti i punti al di sopra ($\le$) della retta $x_2 = -5x_1 + 5$

Si disegnano le rette trovando per ognuna due punti

$x_2 = 2x_1 - 8$	(4, 0)	(5, 2)
$x_2 = (-½)x_1 + 5$	(0, 5)	(2, 4)
$x_2 = -5x_1 + 5$	(0, 5)	(1, 0)

c. Si di segnano le rette del fascio $\omega = -2x_1 + x_2 \rightarrow x_2 = 2x_1 + \omega$

Ne segue che la regione ammissibile è rappresentata dal quadrilatero ABCD e la f.o. dalle rette



d.-e. Si calcola il valore che la funzione obiettivo assume nei vertici e il valore per la funzione obiettivo

I vertici della regione ammissibile (tra cui vi sarà la soluzione ottima) sono i punti
A(1,0) – B(4, 0) – C(26/5, 12/5) – D(0, 5) , dal grafico è evidente che il massimo valore la f.o. ω lo assume nel vertice D, come è possibile verificarlo calcolando il valore di ω in ogni vertice:
ω (A) = ω (1, 0) = -2
ω (B) = ω (4 ,0) = -8
ω (C) = ω (26/5, 12/5) = -8
ω (D) = ω (0, 5) = 5
Il valore massimo per la f.o. ω è in ω (D) = 5

CONTROLLO ALGEBRICO DELL'OTTIMALITÀ del punto D determinato con il metodo grafico
D (0, 5)
Possiamo riscrivere il modello

$$\max \omega = -2x_1 + x_2$$
$$\text{s.a}\quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\le 8 \\ x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ 5x_1 + x_2 &\ge 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

esprimendo i vincoli mediante delle uguaglianze.

Per i primi due vincoli vanno introdotte le due variabili scarto s_1, s_2 che rappresentano l'eccesso del secondo membro delle disuguaglianze sul primo, e per il terzo vincolo che à di $\ge$ va introdotto la variabile surplus $\overline{s_3}$ che rappresenta l'eccesso del primo membro delle disuguaglianze sul secondo.

Tutte le variabili scarto e surplus soddisfano i vincoli di non negatività.

Il sistema dei vincoli funzionali diventa

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + s_1 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 = 10 \\ 5x_1 + x_2 + \overline{s_3} = 5 \end{cases} \qquad \text{cioè } F\underline{w} = \underline{b}$$

Dal grafico vediamo D intersezione delle due rette $x_1 = 0$ (asse x_2) e $s_2 = 0$ frontiera del 2° vincolo, quindi le colonne della base sono associate alle altre variabili, cioè

$$B = [\ \underline{a}_2\ \underline{e}_1\ -\underline{e}_3\ ] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'inversa della base risulta $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

Per determinare la soluzione dobbiamo premoltiplicare F | b

$$B^{-1} F = B^{-1} \underline{b} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}$$

Effettuando il prodotto righe per colonne risulterà

$$\bar{r}_1 = \frac{1}{2} r_2 \qquad \begin{array}{cccccc} 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 5 \end{array}$$

$$\bar{r}_2 = r_1 + \frac{1}{2} r_2 \qquad \begin{array}{cccccc} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 5 \\ \hline 5/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 13 \end{array}$$

$$\bar{r}_3 = \frac{1}{2} r_2 - r_3 \qquad \begin{array}{cccccc} 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 5 \\ -5 & -1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ \hline -9/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{array}$$

Riscrivendo le righe in forma matriciale si ha

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
1/2	1	0	1/2	0	5
5/2	0	1	1/2	0	13
-9/2	0	0	1/2	1	0

Il sistema dei vincoli funzionali diventa

$$\begin{cases} x_2 = 5 - \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} s_2 \\ s_1 = 13 - \frac{5}{2} x_1 - \frac{1}{2} s_2 \\ \bar{s}_3 = 0. + \frac{9}{2} x_1 - \frac{1}{2} s_2 \end{cases}$$

Ricordando che $\omega = -2x_1 + x_2$

$$\omega = -2x_1 + 5 - \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} s_2 = 5 - \frac{5}{2} x_1 - \frac{1}{2} s_2$$

I punti in cui o x_1 o s_2 o entrambi sono negativi sono NON AMMISSIBILI

I punti in cui $x_1 \geq 0$ $s_2 \geq 0$ sono ammissibili e di questi

- Se $x_1 = s_2 = 0$ $\omega = 5$
- Su tutti gli altri punti ammissibili $\omega < 5$ e quindi peggiori

Abbiamo provato che il punto D è l'unico punto di massimo sulla regione ammissibile.

CONTROLLO ALGEBRICO DELLA NON OTTIMALITÀ del punto B determinato con il metodo grafico B(4, 0)
Dal grafico vediamo B intersezione delle due rette $s_1 = 0$ frontiera del 1° vincolo, e $x_2 = 0$ (asse x_1) quindi le colonne della base sono associate alle altre variabili, cioè

$$B = [\, \underline{a}_1 \; \underline{e}_2 \; -\underline{e}_3 \,] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'inversa della base risulta $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Per determinare la soluzione dobbiamo premoltiplicare $F \,|\, \underline{b}$

$$B^{-1} F = B^{-1} \underline{b} \qquad \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 5/2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right] \end{array}$$

Effettuando il prodotto righe per colonne risulterà

$\bar{r}_1 = \frac{1}{2} r_2$	1	-1/2	1/2	0	0	4
$\bar{r}_2 = -\frac{1}{2} r_1 + r_2$	0	5/2	-1/2	1	0	6
$\bar{r}_3 = \frac{5}{2} r_1 - r_3$	0	-7/2	5/2	0	1	15

Riscrivendo le righe in forma matriciale si ha

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
1	-1/2	1/2	0	0	4
0	5/2	-1/2	1	0	6
0	-7/2	5/2	0	1	15

Il sistema dei vincoli funzionali diventa

$$\begin{cases} x_1 = 4 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} s_1 \\ s_2 = 6 - \frac{5}{2} x_2 + \frac{1}{2} s_1 \\ \overline{s_3} = 15. + \frac{7}{2} x_2 - \frac{5}{2} s_1 \end{cases}$$

Ricordando che $\omega = -2x_1 + x_2$

$$\omega = -2(4 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} s_1) + x_2 = -8 - x_2 + s_1 + x_2 = -8 + s_1$$

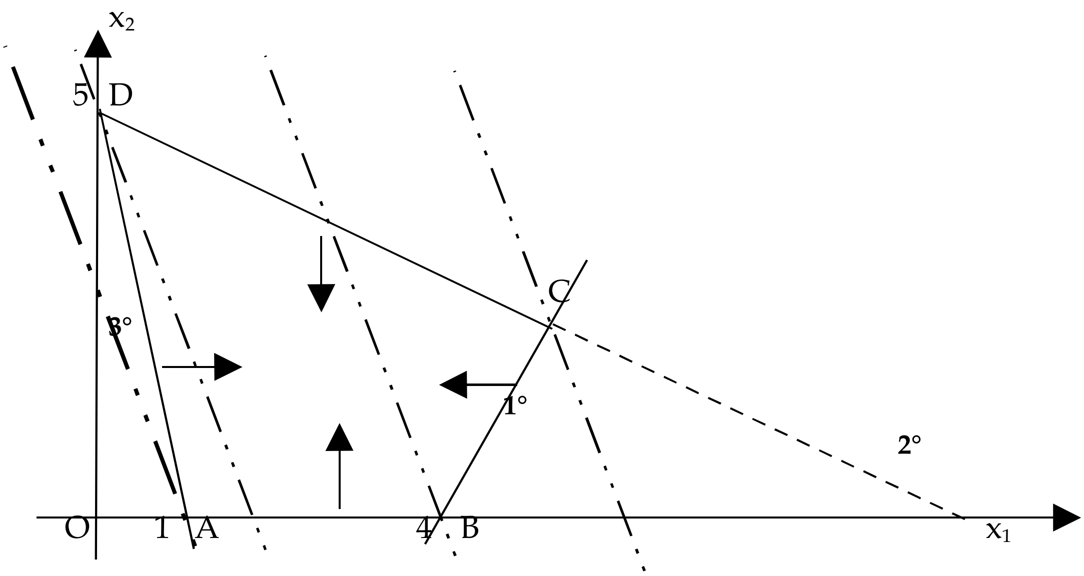
Il valore di ω in B ($\omega = -8$) è migliorabile (quindi <u>NON OTTIMO</u>) attribuendo a s_1 valori positivi (ammissibili)

2.
Risolvere con il metodo grafico il problema di programmazione lineare:

max $\omega = -4x_1 - x_2$
s.a $2x_1 - x_2 \leq 8$
$x_1 + 2x_2 \leq 10$
$5x_1 + x_2 \geq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$

Il problema presenta lo stesso insieme di vincoli dell'esempio precedente e quindi la stessa r.a. il quadrilatero ABCD. Diversa è la f.o.

c. Si disegnano le rette del fascio $\omega = -4x_1 - x_2 \rightarrow x_2 = -4x_1 - \omega$
max ω = min $-\omega$, cioè dal grafico si potrà dedurre come vertice "ottimo "quello cui corrisponde il minimo valore dell'ordinata all'origine del fascio $x_2 =- 4x_1 - \omega$



d.-e. Si calcola il valore che la funzione obiettivo assume nei vertici e il valore per la funzione obiettivo

I vertici della regione ammissibile (tra cui vi sarà la soluzione ottima) sono i punti A(1,0) – B(4, 0) – C(26/5, 12/5) – D(0, 5) , dal grafico è evidente che il minimo valore la f.o. ω lo assume nel vertice A, come è possibile verificarlo calcolando il valore di ω in ogni vertice:

ω (A) = ω (1, 0) = - 4
ω (B) = ω (4, 0) = - 16
ω (C) = ω (26/5, 12/5) = -116/5
ω (D) = ω (0, 5) = - 5

Il valore massimo per la f.o. ω è in ω (A) = -4

3.

COSTRUZIONE DEL MODELLO E RISOLUZIONE

Un piccolo mobilificio costruisce tavoli e sedie .
Occorrono 2 ore per costruire un tavolo e 30m per costruire una sedia.
L'assemblaggio viene fatto da 4 operai, ognuno dei quali lavora 8 ore al giorno.
I clienti acquistano **al massimo** 4 sedie per tavolo, ciò significa che l'azienda **deve produrre al massimo 4 sedie per tavolo**.

I prezzi sono 135€ per tavolo e 50€ per sedia, determinare la produzione giornaliera ottimale di tavoli e sedie, affinché si realizzi il massimo profitto.

MODELLO MATEMATICO

Variabili decisionali
x_1 n° di tavoli da produrre
x_2 n° di sedie da produrre

f.o. $\omega = 135x_1 + 50x_2$

s.a.		Espressione di x_2 in termini di x_1
I.	$2x_1 + 1/2\, x_2 \leq 32$	$x_2 \leq 64 - 4x_1$
II.	$4x_1 \geq x_2$	$x_2 \leq 4x_1$
III.	$x_1\ x_2 \geq 0$	vincoli di non negatività

Determinazione di punti per la rappresentazione dei vincoli e quindi della regione ammissibile

Determinazione dei punti per cui passano le frontiere dei semipiani rappresentati da ciascun vincolo

I. $x_2 = -4x_1 + 64$

x_1	x_2
0	64
4	48

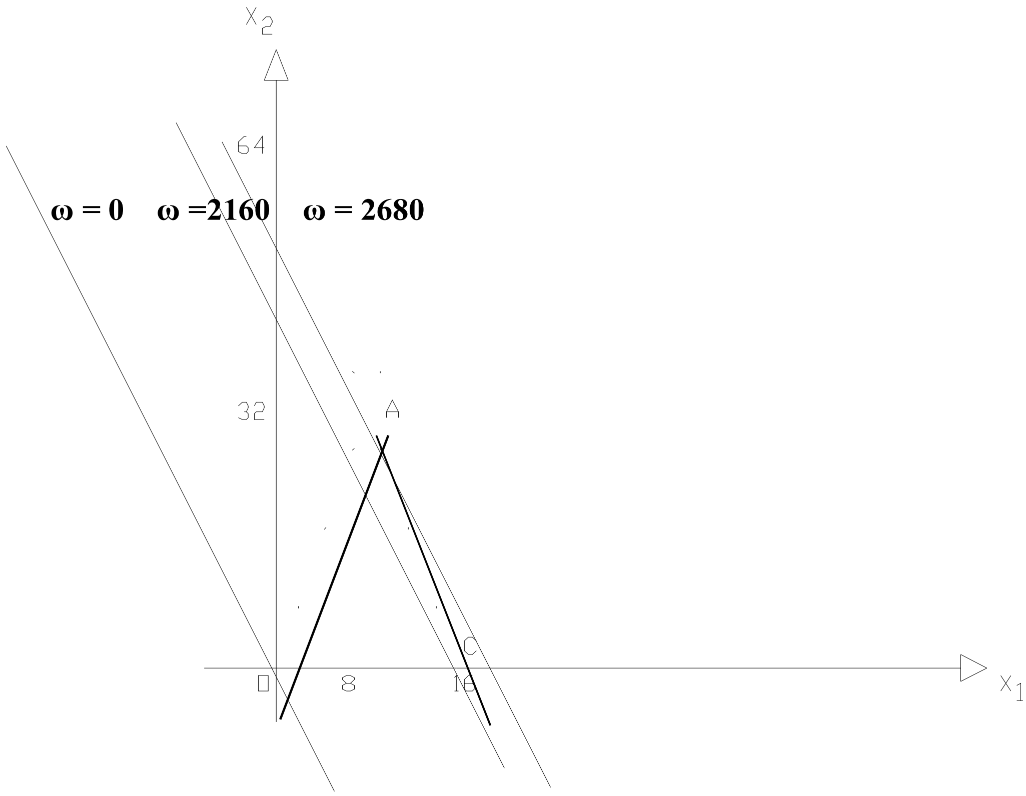
II. $x_2 = 4x_1$

x_1	x_2
0	0
4	16

Determinazione dei punti per cui passano le curve di livello che rappresentano la f.o.

f.o. $x_2 = -135/50 x_1 + \omega/50$
$x_2 = -27/10 x_1 + \omega/50$

x_1	x_2
-10	27
-20	54



Vertici della regione ammissibile:

Vincoli I – II	Vincoli I – III	Vincoli II - III
$\begin{cases} 2x_1 + 1/2x_2 = 32 \\ x_2 = 4x_1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 1/2x_2 = 32 \\ x_2 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_2 = 4x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$
A (8 ,32)	C (16, 0)	O (0 , 0)

Dal grafico è evidente che il massimo valore la f.o. ω lo assume nel vertice A, come è possibile verificarlo calcolando il valore di ω in ogni vertice:

ω (O) = ω (0 ,0) = 0

ω (A) = ω (8 ,32) = 2680

ω (C) = ω (16, 0) = 2160

Il valore massimo per la f.o. ω è in ω (A) = 2680

Soluzione ottima ω = 2680 con $x_1 = 8$, $x_2 = 32$, cioè il massimo profitto si realizza con la produzione di 8 tavoli e 32 sedie ed è di 2680€

4.

COSTRUZIONE DEL MODELLO E RISOLUZIONE

Due prodotti vengono fabbricati facendoli passare attraverso tre macchinari.
Il tempo di funzionamento di ogni macchinario assegnato ai due prodotti è limitato a 10 ore al giorno.
I tempi di produzione ed il profitto per unità di prodotto sono :

Minuti per unità				
Prodotto	Macc.1	Macc.2	Macc.3	Profitto
P1	10	6	8	2€
P2	5	20	15	3€

1. Trovare il mix ottimale dei due prodotti

MODELLO MATEMATICO

Variabili decisionali
x_1 n° di unità del 1°prodotto e x_2 n° di unità del 2°prodotto
f.o. $\omega = 2x_1 + 3x_2$

s.a.		Espressione di x_2 in termini di x_1
I	$10x_1 + 5x_2 \leq 600$	$x_2 \leq -2x_1 + 120$
II	$6x_1 + 20x_2 \leq 600$	$x_2 \leq -3/10x_1 + 30$
III	$8x_1 + 15x_2 \leq 600$	$x_2 \leq -8/15x_1 + 40$
IV	$x_1, x_2 \geq 0$	vincoli di non negatività
f.o.	$\omega = 2x_1 + 3x_2$	$x_2 = -2/3x_1$

Rappresentazione grafica dei vincoli e della funzione obiettivo

I. $x_2 = -2x_1 + 120$

x_1	x_2
0	120
60	0

II. $x_2 = -3/10x_1 + 30$

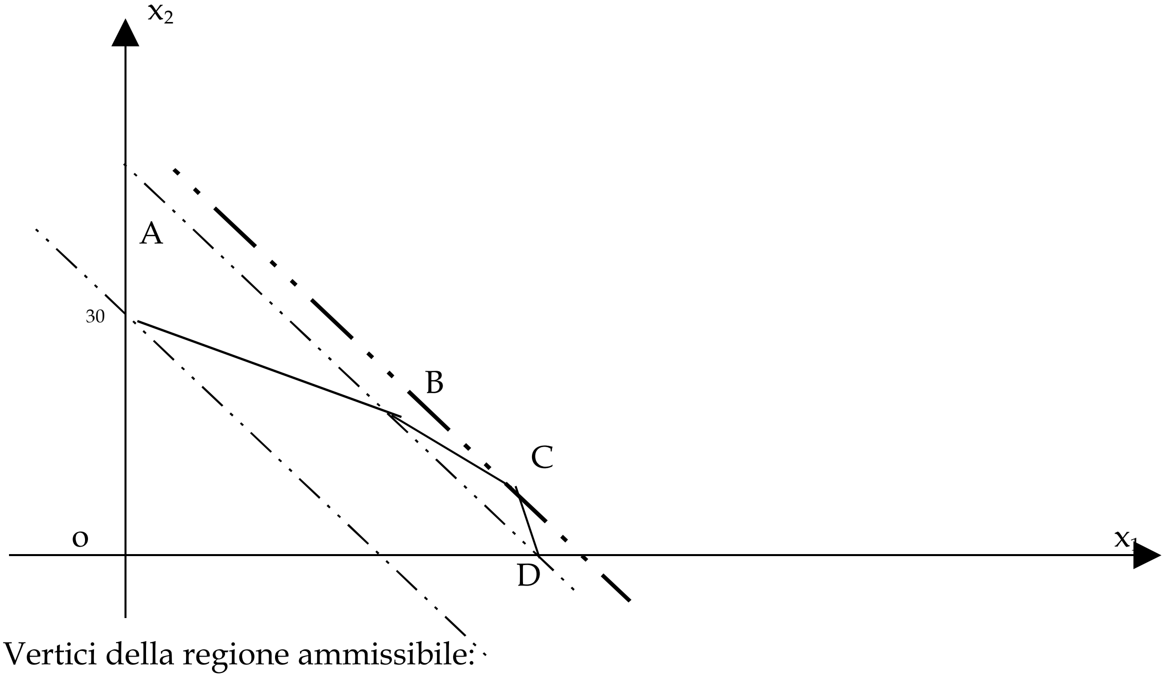
x_1	x_2
0	30
100	0

III. $x_2 \leq -8/15x_1 + 40$

x_1	x_2
0	40
75	0

f.o. $x_2 = -2/3x_1$

x_1	x_2
0	0
3	- 2



Vertici della regione ammissibile:

I-III{ C(,) II-III{ B(,) I-IV{ D(60,0); II-V{ A(0,30)

1. Dal grafico si vede che il max della f.o. è nel vertice C della regione ammissibile, intersezione delle rette (vincoli)

…………………………………………………………………………….
…………………………………………………………………………….

Soluzione ottima ω = ………..
in …….. x_1 = ……, x_2 =…….

5.
SOLUZIONI OTTIME ALTERNATIVE (MULTIPLE)

La soluzione ottimale di un problema di p-l non è necessariamente unica, questa circostanza si verifica allorché le curve di livello della funzione obiettivo sono parallele ad una delle facce del poliedro che rappresenta la funzione obiettivo.

Riprendendo l'esempio precedente e supponendo che il profitto per il prodotto 2 sia di 1€, in luogo dei 3€ originariamente ipotizzati, a parità di tutte le altre condizioni del problema.

Minuti per unità				
Prodotto	Macc.1	Macc.2	Macc.3	Profitto
1	10	6	8	2€
2	5	20	15	**1€**

Sotto le nuove ipotesi il problema si riformulerà come:

f.o. $\boldsymbol{\omega = 2x_1 + x_2}$ fascio improprio di rette

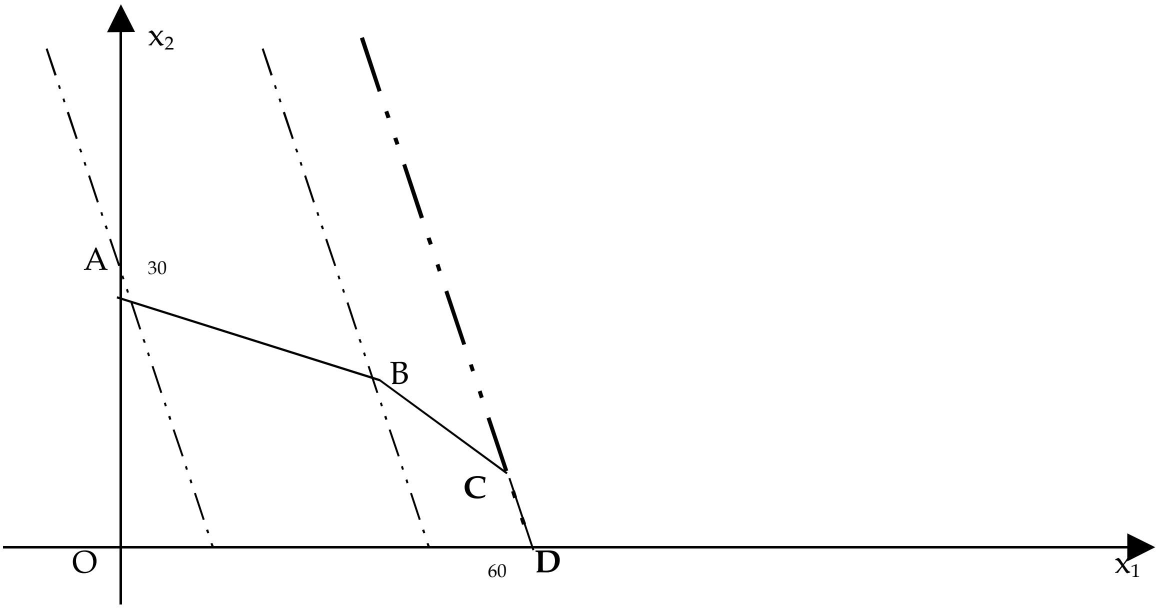
s.a. $10x_1 + 5x_2 \leq 600$ $x_2 \leq -2x_1 + 120$

$6x_1 + 20x_2 \leq 600$ $x_2 \leq -3/10x_1 + 30$

$8x_1 + 15x_2 \leq 600$ $x_2 \leq -8/15x_1 + 40$

$x_1 , x_2 \geq 0$

max $2x_1 + x_2$ $x_2 = - 2x_1 + \omega$



Una faccia del poligono ammissibile è parallela alle curve di livello, e quindi tutti i mix produttivi corrispondenti ai punti di tale faccia sono soluzioni ottimali.
Rimane tuttavia vero che almeno un vertice è ottimale (in questo caso i vertici ottimali sono due), e quindi l'enumerazione dei soli vertici costituisce anche in questo caso una procedura risolutiva corretta.

………………………………………………………………………………

$\omega (C) = \omega (D) = 120$

6.
PROBLEMI PRIVI DI SOLUZIONE OTTIMA

Vi sono due circostanze nelle quali un problema non ammetta soluzioni ottimali :

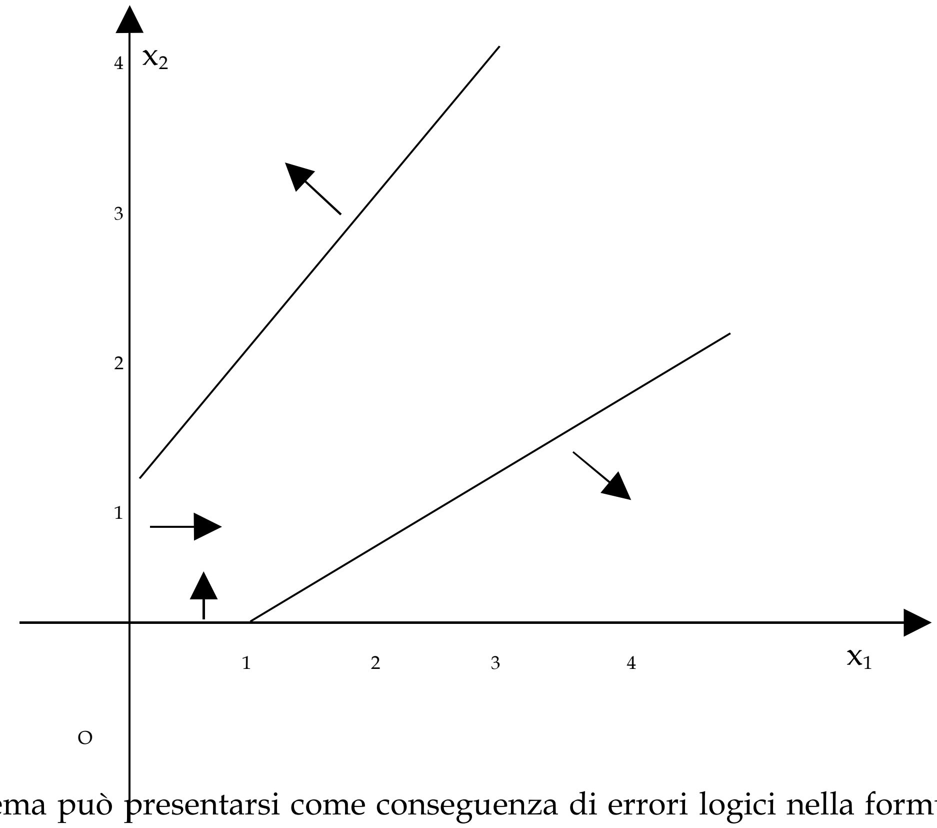
a. non esistono soluzioni ammissibili per il problema, ovvero la regione ammissibile è vuota

b. pur essendo non vuota la regione ammissibile, la funzione obiettivo risulta superiormente illimitata nel caso di un problema di massimizzazione (o inferiormente nel caso di un problema di minimizzazione)

a."REGIONE AMMISSIBILE VUOTA"
Consideriamo il problema di P.-L.

max (x_1+x_2)
s.a. $-x_1+2x_2 \leq -1$
$x_1 - x_2 \leq -1$
$x_1, x_2 \geq 0$

La rappresentazione geometrica indica che i vincoli del problema sono tra loro incompatibili, e che di conseguenza la regione ammissibile è vuota



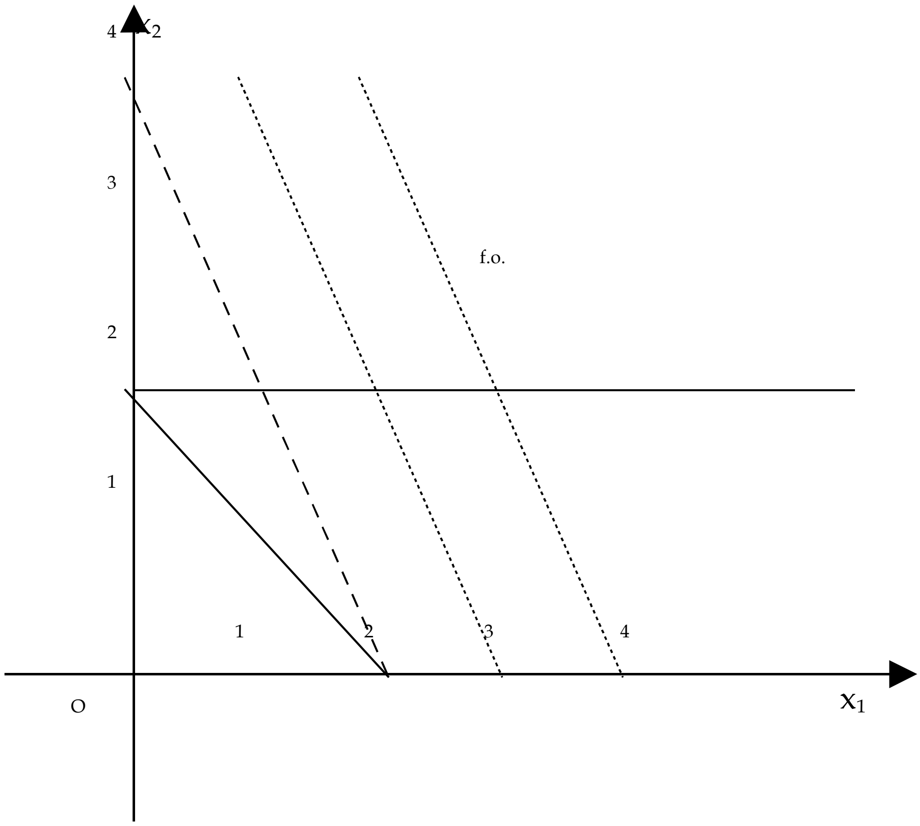
Un tale problema può presentarsi come conseguenza di errori logici nella formulazione di un modello, o più banalmente può dipendere da errori nella raccolta o inserimento dei dati del problema stesso.

b."FUNZIONE OBIETTIVO ILLIMITATA"

Consideriamo il problema di P.-L.

$$\max\ (x_1+2x_2)$$
$$\text{s.a.}\quad x_2 \le 2$$
$$x_1 + x_2 \ge 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

La rappresentazione geometrica indica che le curve di livello possono crescere oltre ogni limite, in corrispondenza di punti appartenenti alla regione ammissibile è illimitata



La illimitatezza della regione ammissibile è **condizione necessaria ma non sufficiente** per l'illimitatezza del problema associato.

Infatti se la funzione obiettivo
$\min\ (x_1-2x_2)$
allora la soluzione ottimale coinciderebbe con il vertice di coordinate (0, 2).

Un tale problema rappresenta una situazione patologica, presume un errore logico nella formulazione di un modello, o un errore di inserimento dei dati del problema stesso.

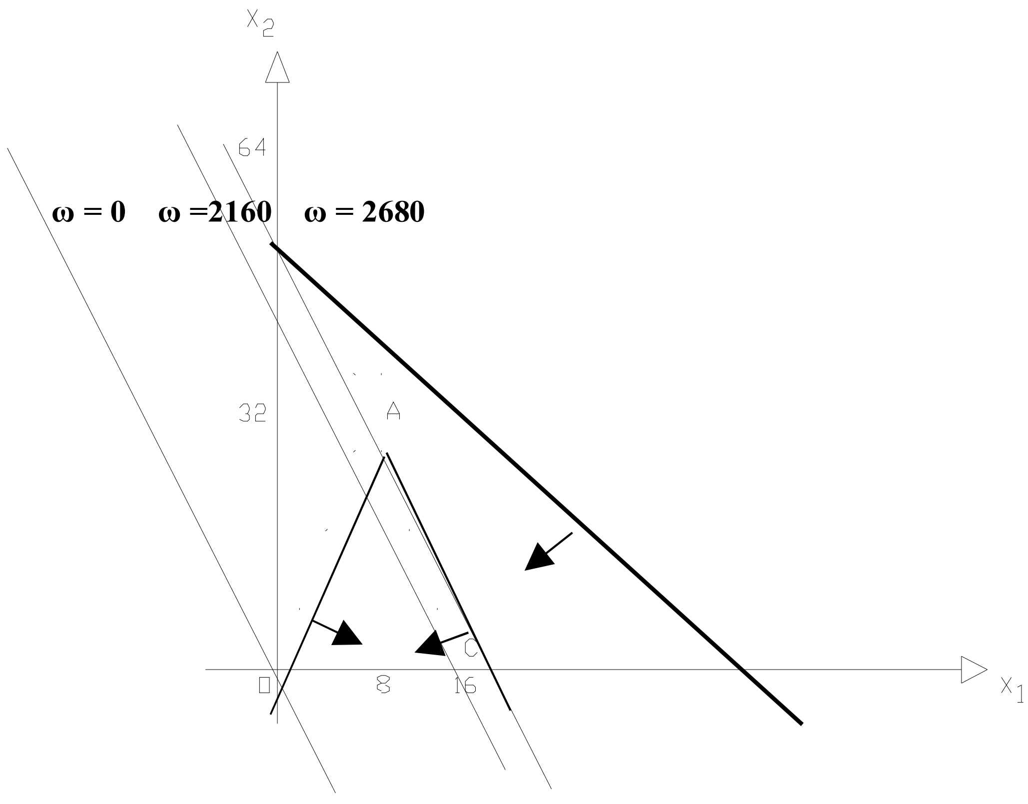
7.
VINCOLI RIDONTANTI

Con riferimento al problema n°1 del mobilificio che produce tavoli e sedie, supponiamo che il decisore voglia tener conto di un ulteriore vincolo e cioè che per la poca disponibilità di legno non si potranno produrre più di 50 fra tavoli e sedie.
Il modello di P.-L. può essere riformulato nel modo seguente mediante l'introduzione del nuovo vincolo

Variabili decisionali
x_1 n° di tavoli da produrre
x_2 n° di sedie da produrre

f.o. $\omega = 135\, x_1 + 50\, x_2$

s.a.
$2x_1 + 1/2\, x_2 \leq 32$
$x_2 \leq 4x_1$
$\underline{\mathbf{x_1 + x_2 \leq 50}}$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$



L'aggiunta de nuovo vincolo non modifica la regione ammissibile, e quindi neanche la soluzione ottimale.
In questo caso si dice che il vincolo è **ridondante**