ANALISI DI SENSITIVITA' O DI POST – OTTIMALITA'(b)

ESEMPIO 1 (v.o. profitto)

$$\max \omega = x_1 + 5x_2 + x_3$$
$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 30 \\ \mathbf{x_1 - 3x_2 + x_3} &\ \mathbf{\ge 10} \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &\le 28 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\min \varphi = - x_1 - 5x_2 - x_3$$
$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 30 \\ \mathbf{x_1 - 3x_2 + x_3} &\ \mathbf{\ge 10} \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &\le 28 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

il tableau iniziale è

$$T_i = \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & \overline{s_2} & s_3 & \varphi & b \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 30 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{10} \\ 1 & 4 & -1 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 28 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

cioè del tipo

$$T_i = \begin{array}{cccccc} & s_1 & \overline{s_2} & s_3 & \varphi & \\ \hline A & \underline{e}_1 & \mathbf{-\underline{e}_2} & \underline{e}_3 & \underline{0} & \underline{b} \\ -\underline{c}^T & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

v.b. (s_1, s_2, s_3), v.n.b. (x_1, x_2, x_3), il tableau finale si ottiene con la moltiplicazione

$$\begin{array}{cc} B^{-1} & \underline{0} \\ \underline{c}_B^T B^{-1} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} & s_1 & \overline{s_2} & s_3 & \varphi & \\ \hline A & \underline{e}_1 & \mathbf{-\underline{e}_2} & \underline{e}_3 & \underline{0} & \underline{b} \\ -\underline{c}^T & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & \gamma \end{array}$$

la sol. ammissibile di base iniziale va determinata con la 1^ fase dell'algoritmo del simplesso, e poi di seguito per giungere alla soluzione ottima si procede con la 2^ fase.

Sapendo che l'ottimo della f.o. è "associato" ad una tableau in cui v.b. sono nell'ordine x_1, x_2, x_3,(nel caso in esame risulta B = A e $\underline{c}_B = \underline{c}$) allora nel tableau iniziale la base dell'ottimo è

$$B = \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{array}$$

Come determinare a partire da questa il tableau finale?
Calcolando l'inversa B^{-1} si ha

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/10 & 3/5 & 1/2 \\ 1/5 & -1/5 & 0 \\ 7/10 & -1/5 & -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Quindi del tableau finale si avranno le colonne relative alle variabili s_1 $\bar{s}_2$ s_3 e alle variabili decisionali, si noti che nella colonna della variabile surplus $\bar{s}_2$ le componenti hanno il segno cambiato.

	x_1	x_2	x_3	s_1	$\bar{s}_2$	s_3	φ	b
T_f =	1	0	0	-1/10	**-3/5**	1/2	0	
	0	1	0	1/5	**1/5**	0	0	
	0	0	1	7/10	**1/5**	-1/2	0	
	0	0	0				1	

Come faremo a determinare i termini noti?
Ricordiamo che i termini noti del tableau finale si determinano con la relazione

$\underline{b}' = B^{-1}\underline{b}$ quindi si ha :

$$B^{-1}\underline{b} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} .... \\ ..... \\ ...... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .... \\ ..... \\ ...... \end{pmatrix}$$

Il tableau finale si completa di una altra colonna

	x_1	x_2	x_3	s_1	$\bar{s}_2$	s_3	φ	b
T_f =	1	0	0	-1/10	-3/5	1/2	0	
	0	1	0	1/5	1/5	0	0	
	0	0	1	7/10	1/5	-1/2	0	
	0	0	0				1	

Come si farà a determinare i coefficienti di costo relativo?
Per le variabili decisionali si avrà $\underline{c}_B B^{-1}A - \underline{c}^T = (0\ \ 0\ \ 0)$ in quanto $B^{-1}A = I$ e $\underline{c}_B = \underline{c}^T$, giacchè le variabili decisionali sono di base.
Per le variabili non decisionali si avrà $\underline{c}_B B^{-1}\underline{e}_1$ $-\underline{c}_B B^{-1}\underline{e}_2$ $\underline{c}_B B^{-1}\underline{e}_3$

$$\underline{c}_B^T B^{-1} = \frac{1}{10}(-1\ \ -5\ -1) \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}(-....,\ \ ....,\ ...) = (-...,\ \ ....,0)$$

il segno dipende dalla natura delle variabili: le scarto s_1 s_3 presentano i coefficienti di costo relativo di segno non positivo, mentre la variabile surplus $\bar{s}_2$ presenta il coefficiente di costo relativo di segno positivo.

Il tableau diventa

	x_1	x_2	x_3	s_1	$\overline{s_2}$	s_3	φ	b
T_f =	1	0	0	-1/10	-3/5	1/2	0	17
	0	1	0	1/5	1/5	0	0	4
	0	0	1	7/10	1/5	-1/2	0	5
	0	0	0	-8/5		0	1	

In ultimo possiamo determinare il valore ottimo della funzione:

$$\varphi = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} = \left(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right) \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = - \dots \qquad \text{(sarà la } \omega = \dots)$$

alla fine il tableau è

	x_1	x_2	x_3	s_1	$\overline{s_2}$	s_3	φ	b
T_f =	1	0	0	-1/10	-3/5	1/2	0	17
	0	1	0	1/5	1/5	0	0	4
	0	0	1	7/10	1/5	-1/2	0	5
	0	0	0	-8/5	-3/5	0	1	

Valori ottimi delle v. decisionali

Il valore ottimo della v.o. viene massimizzato con

$x_1 = 17$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $s_1 = 0$, $\overline{s_2} = 0$, $s_3 = 0$, e
$\varphi = -42$, $\omega = 42$

Va osservato che le tre variabili relative ai vincoli sono fuori base quindi assumono valore nullo il che vuol dire che il primo e secondo vincolo si equivalgono e quindi le risorse cui si riferiscono sono completamente utilizzate. In tale circostanza si dice che i vincoli sono saturi.
La presenza di un coefficiente di costo relativo di una v.n.b. nullo esprime l'esistenza di una soluzione ottima alternativa

1. VARIAZIONE DELLA DISPONIBILITÀ DELLE RISORSE

Variazione della disponibilità della risorsa rappresentata dal 1° vincolo
Variazione del termine noto del 1° vincolo

Si ha un beneficio per la f.o. aumentando di 10 unità la risorsa del primo vincolo (termine noto) al costo di 20 ?

$$B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/10 \\ 1/5 \\ 7/10 \end{pmatrix}\delta \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ condizioni di ammissibilità

$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} 17 - \frac{1}{10}\delta \geq 0 \\ 4 + \frac{1}{5}\delta \geq 0 \\ 5 + \frac{7}{10}\delta \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow -....... \leq \delta \leq ..... \rightarrow \frac{160}{7} \leq \tilde{b}_1 \leq .....$$

__Intervallo di variazione del profitto ω associato all'intervallo__ $\tilde{b}_1 \in [.....,.......]$

$$\tilde{\phi} = \phi + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{e}_1 \delta = -42 - 8/5\delta \qquad -314 \leq \tilde{\phi} \leq -\frac{214}{7}$$

$$\frac{214}{7} \leq \tilde{\omega} \leq 314$$

Se $\delta = 10$ si ha $\Delta\varphi = -8/5(10) = -16$ a fronte di un costo di 20 per unità quindi tale aumento di risorsa non è conveniente.

__Variazione della disponibilità della risorsa rappresentata dal 2° vincolo__
Variazione del termine noto del 2° vincolo

Cosa succede la disponibilità della seconda risorsa aumentasse fino a 35?

Ricordando che con la variazione di b_2 variano i termini del tableau:

$$B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} .... \\ ..... \\ ...... \end{pmatrix}\delta \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 17 + \frac{3}{5}\delta \geq 0 \\ 4 - \frac{1}{5}\delta \geq 0 \rightarrow -\frac{85}{3} \leq \delta \leq 20 \rightarrow -\frac{55}{3} \leq \tilde{b}_2 \leq 30 \\ 5 - \frac{1}{5}\delta \geq 0 \end{cases}$$

da ciò si ricava che se b_2 crescesse fino a 35 la base non risulterebbe più ammissibile, per ripristinare l'ammissibilità sarà necessario applicare l'algoritmo del simplesso duale.

__Intervallo di variazione del profitto ω associato all'intervallo__ $\tilde{b}_2 \in [.....,.......]$

$$\tilde{\phi} = \phi + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{e}_1 \delta = -42 - 3/5\delta \qquad ....$$

$$............ \leq \tilde{\omega} \leq ....$$

2. VARIAZIONE DEI PROFITTI UNITARI DEI BENI-

Variazione di un coefficiente di costo p

Possono variare i coefficienti di costo di v.decisionali (tutti relativi a v.b.) e ciò comporta variazioni dei coefficienti di costo relativo di tutte le v.n.b.

$\underline{\tilde{p}}_B = \underline{p}_B + \underline{e}_j\delta$

$\underline{\tilde{c}}_B = \underline{c}_B - \underline{e}_j\delta$ e quindi dei coefficienti di costo

- $\underline{r}_n^T = \underline{c}_B^T B^{-1}N - \underline{c}_N^{\,T} \Rightarrow \underline{\tilde{r}}_N^T = (\underline{c}_B^T - \underline{e}_j^T\delta)\ B^{-1}N - \underline{c}_N^T = \ldots\ldots\ldots = \underline{r}_n^T - e_j^T\delta B^{-1}N$

  con $e_j^T\delta B^{-1}N$ j-esima riga del tableau finale relativa alle sole v.n.b. se j è l'ordine della variabile b. cui è relativo c_B)

  e

- $\underline{c}_B^T B^{-1}b + \gamma$, cioè della f.o

  $\Rightarrow \tilde{\phi} = (\ \underline{c}_B - \underline{e}_j^T\delta\ )\ B^{-1}\underline{b} + \gamma\ = \ldots\ldots\ldots = \phi - e_j^T\delta B^{-1}\underline{b} \Rightarrow \tilde{\omega} = \omega + e_j^T\delta B^{-1}\underline{b}$

  con $e_j^T\delta B^{-1}\underline{b}$ valore della j-esima v. b.**).**

- Variazione di $p_1 = 1$ relativa alla v. x_1 prima v.b. quindi

$$\underline{p}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\tilde{p}}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + e_2\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\delta$$

$$\underline{c}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\tilde{c}}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} - e_2\delta = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\delta$$

$\tilde{p}_1 = 1 + \delta \qquad \tilde{c}_1 = -1 - \delta$

$$\underline{\tilde{r}}^T{}_N = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}, & -\frac{3}{5}, & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\delta = \begin{bmatrix} -\ldots\ldots\ldots\ldots\delta, & -\ldots\ldots\ldots\ldots\delta, & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Affinché la base rimanga ottima deve risultare

$\underline{\tilde{r}}_4 = [-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\delta\ ] \le 0 \to \delta \le 16$

$\underline{\tilde{r}}_5 = [-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\delta\ ] \le 0 \to \delta \le 1$

$\begin{cases} \delta \le 16 \\ \delta \ge 1 \end{cases}$ e quindi $\delta \le 1$, $p_1 \le 2$

La funzione obiettivo diventa $\tilde{\phi} = -42 - 17\delta$ cioè $\tilde{\phi} \ge -59$

$\tilde{\omega} = 42 + 17\delta$ cioè $\tilde{\omega} \le 59$

3. **VARIAZIONE DI UTILIZZO DELLE RISORSE**

Variazione di un elemento di A

Le possibili variazioni che possono lasciare invariata la base sono relative a coefficienti di variabili decisionali n.b., nel caso in esame le variabili decisionali sono tutte di base, per cui non faremo alcun studio di tale variazione.

ESEMPIO 2 (v.o. costo)

$$\min \varphi = 2x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 2 \\ -x_1 \qquad + x_3 &\geq 10 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &\geq 18 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

il tableau iniziale è

$$T_i = \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \bar{s}_1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_3 & \varphi & b \\ \hline 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 18 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

cioè del tipo

$$T_i = \begin{array}{cccccc} & \bar{s}_1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_3 & \varphi & \\ \hline A & -\underline{e}_1 & -\underline{e}_2 & -\underline{e}_3 & \underline{0} & \underline{b} \\ -\underline{c}^T & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

v.b. (s_1, s_2, s_3), v.n.b. (x_1, x_2, x_3), il tableau finale si ottiene con la moltiplicazione

$$\begin{array}{cc} B^{-1} & \underline{0} \\ \underline{c}_B^T B^{-1} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} & \bar{s}_1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_3 & \varphi & \\ A & \underline{e}_1 & -\underline{e}_2 & \underline{e}_3 & \underline{0} & \underline{b} \\ -\underline{c}^T & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}$$

la sol ammissibile di base iniziale va determinata con la 1^ fase dell'algoritmo del simplesso, e poi di seguito per giungere alla soluzione ottima si procede con la 2^ fase.

Sapendo che l'ottimo della f.o. è "associato" ad una tableau in cui v.b. sono nell'ordine x_2, x_3, $\bar{s}_1$ allora nel tableau iniziale la base dell'ottimo è

$$B = \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & \bar{s}_1 \\ \hline 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{array}$$

Come determinare a partire da questa il tableau finale?

Calcolando l'inversa B^{-1} si ha

$$B^{-1} = \begin{array}{ccc} \bar{s}_1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_3 \\ \hline 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 2 \end{array}$$

Quindi del tableau finale si avranno le colonne relative alle variabili $\bar{s}_1\ \bar{s}_2\ \bar{s}_3$, per determinare i valori relativi alle variabili decisionali si procede calcolando per ogni colonna a_k il prodotto $B^{-1}\underline{a}_k$ e si ottiene il tableau

$T_f =$

	x_1	x_2	x_3	$\bar{s}_1$	$\bar{s}_2$	$\bar{s}_3$	φ	b
	-2	1	0	**0**	**-4**	**-1**	0	
	-1	0	1	**0**	**-1**	**0**	0	
	-6	0	0	**1**	**-9**	**-2**	0	
		0	0				1	

si noti che nella colonna delle variabili surplus $\bar{s}_1\ \bar{s}_2\ \bar{s}_3$ le componenti hanno il segno cambiato.

Come faremo a determinare i termini noti?
Ricordiamo che i termini noti del tableau finale si determinano con la relazione

$b' = B^{-1}\underline{b}$ quindi si ha :

$$B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots. \\ \ldots.. \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Il tableau finale si completa di una altra colonna

$T_f =$

	x_1	x_2	x_3	$\bar{s}_1$	$\bar{s}_2$	$\bar{s}_3$	φ	b
	-2	1	0	0	-4	-1	0	
	-1	0	1	0	-1	0	0	
	-6	0	0	1	-9	-2	0	
		0	0	0			1	

Come si farà a determinare i coefficienti di costo relativo?
Per le variabili surplus si ha:

$$\underline{c}_B^T B^{-1} = (1, 1, 0) \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 2 \end{bmatrix} = (\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

il segno dipende dalla natura delle variabili: le variabile surplus $\bar{s}_1\ \bar{s}_2\ \bar{s}_3$

presentano i coefficienti di costo relativo di segno positivo, nel tableau sarà negativo

Per le variabili decisionali i coefficienti di costo relativo saranno:

$$\underline{c}_B^T B^{-1} \text{A} - \underline{c}^T = (1,1,0) \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} - (2, 1, 1) = (-5, 0, 0)$$

Il tableau diventa

$$T_f = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \bar{s}_1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_3 & \varphi & b \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 58 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ -6 & 0 & 0 & 1 & -9 & -2 & 0 & 124 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & -5 & -1 & 1 & \end{array}$$

In ultimo possiamo determinare il valore ottimo della funzione:

$\varphi = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 58 \\ 10 \\ 124 \end{pmatrix} = 68$ alla fine il tableau risulta

$$T_f = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \bar{s}_1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_3 & \varphi & b \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 58 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ -6 & 0 & 0 & 1 & -9 & -2 & 0 & 124 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & -5 & -1 & 1 & 68 \end{array}$$

Valori ottimi delle v. decisionali

Il valore ottimo della v.o. viene minimizzato con

$x_1 = 0$, $x_2 = 58$, $x_3 = 10$, $\bar{s}_1 = 124$, $\bar{s}_2 = 0$, $\bar{s}_3 = 0$, e $\varphi = 68$.

1. VARIAZIONE DELLA DISPONIBILITÀ DELLE RISORSE

Variazione della disponibilità della risorsa rappresentata dal 1° vincolo

Quale sarebbe il valore della f.o., se il termine noto del primo vincolo diventasse 126?

Per la variazione del primo vincolo si ha $B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \begin{pmatrix} 58 \\ 10 \\ 124 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \delta \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Condizioni di ammissibilità $\begin{cases} 58 > 0 \\ 10 > 0 \\ 124 - \delta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \delta \leq 124$

quindi poiché $b_1= 2$, risulterebbe $b_1 \leq 126$, il nuovo termine b_1 coincide proprio con l'estremo superiore dell'intervallo in cui la composizione della base non cambia.

<u>Intervallo di variazione del costo φ associato al valore</u> $b_1 = 126$

$$\widetilde{\phi} = \phi + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{e}_1 \delta = 68 + 0\delta$$

Il valore della funzione costo giacchè la variabile $\overline{s_1}$ relativa al 1° vincolo è di base il che vuol dire che il primo vincolo non è attivo nell'ottimo.

2. VARIAZIONE DEI PCOSTI UNITARI DEI BENI-

Variazione di un coefficiente di costo c

Come cambierebbe la soluzione ottima se il coefficiente della variabile x_1 nella f.o. crescesse a 10?

La variazione di coefficienti di costo di v.n.b. comporta la variazione del termine $\underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}^T$

infatti varia il coefficiente di costo

$$\widetilde{\underline{c}}_N = \underline{c}_N - \underline{e}_1 \delta$$

$c_1 = 2$ quindi $\widetilde{\underline{c}}_N = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nel nostro caso risultando $\delta = -8$ l'ottimo si conserva infatti risulta:

$$\underline{r}_n^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T \rightarrow \widetilde{\underline{r}}_n^T = [\underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T] + \delta \underline{e}^T = \underline{r}_n^T + \delta \underline{e}^T$$

$$\widetilde{\underline{r}}_1 = \underline{r}_1 + \delta = -5 - 8 = -11$$

3. **VARIAZIONE DI UTILIZZO DELLE RISORSE**

Variazione di un elemento di A

Considereremo solo variazioni di un elemento della colonna **<u>a_i non di base</u>** nel tableau finale

$$\begin{bmatrix} B^{-1}A & [B^{-1}] & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \underline{c}_B^T B^{-1}A - \underline{c}^T & \underline{c}_B^T B^{-1} & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma \end{bmatrix}$$

valutando le variazioni che migliorano ulteriormente il costo

[1] $\underline{a}_i^{'} = B^{-1} \underline{a}_i$ risulterà $\widetilde{\underline{a}}_i = \underline{a}_i + e_j \delta$

Nel caso in esame nel tableau finale colonna non di base relativa a **variabili decisionali** è la prima $\underline{a}_1$

$T_f =$

	x_1	x_2	x_3	$\bar{s}_1$	$\bar{s}_2$	$\bar{s}_3$	φ	b
		1	0	0	-4	-1	0	58
		0	1	0	-1	0	0	10
		0	0	1	-9	-2	0	124
		0	0	0	-5	-1	1	68

l' omologa nel tableau iniziale è

$T_i =$

	x_1	x_2	x_3	$\bar{s}_1$	$\bar{s}_2$	$\bar{s}_3$	φ	b
		2	1	-1	0	0	0	2
		0	1	0	-1	0	0	10
		1	-4	0	0	-1	0	18
		-1	-1	0	0	0	1	0

le colonne relative a v.n.b. sono

$$N = \begin{array}{ccc} 1^\wedge & 5^\wedge & 6^\wedge \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{-1} & -1 & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & -1 \end{array}$$

Se varia la terza componente della colonna a_1

$$\underline{\tilde{a}}_1 = \underline{a}_1 + e_3\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2+\delta \end{bmatrix}$$

varia solo l' elemento $\underline{r}_1 = \; = \underline{c}_B^T B^{-1}\tilde{a}_1 - \underline{c}_1$

con $\underline{c}_B^T B^{-1}$ ultima riga del tableau in corrispondenza v. b. iniziali [0, -5, -1]

con $\tilde{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2+\delta \end{bmatrix}$ e $\underline{c}_1 = 2$

quindi $\underline{\tilde{r}}_1 = [0, -5, -1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2+\delta \end{bmatrix}$ - (2) $= 5 - 2 - \delta + 2 = 5 - \delta$

Per quale variazione del coefficiente a_{31} si ha un miglioramento della funzione costo (v.o.)?

se $\underline{\tilde{r}}_1 \geq 0$ la base non è ottima $\delta < 5$, va portata in base x_1 con un passo dell'algoritmo del simplesso.

ESEMPIO 3

min $\varphi = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$

s.a $\quad x_1 - x_2 + x_3 \leq 7$

$-x_1 + 2x_3 + 2x_4 \geq 21$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \geq 15$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

il tableau iniziale è

$$
\begin{array}{c}
\\
T_i =
\end{array}
\begin{array}{cccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & s_1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_3 & \varphi & b \\
\hline
1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\
-1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 21 \\
2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 15 \\
-2 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

cioè del tipo

$$
T_i = \begin{array}{c|ccccc|c}
 & s_1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_3 & \varphi & \\
\hline
A & \underline{e}_1 & -\underline{e}_2 & -\underline{e}_3 & \underline{0} & \underline{b} \\
-\underline{c}^T & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

v.b. (s_1, s_2, s_3), v.n.b. (x_1, x_2, x_3, x_4), il tableau finale si ottiene con la moltiplicazione

$$
\begin{bmatrix} B^{-1} & \underline{0} \\ \underline{c}_B^T B^{-1} & 1 \end{bmatrix}
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & s_1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_3 & \varphi & \\
\hline
A & \underline{e}_1 & -\underline{e}_2 & -\underline{e}_3 & \underline{0} & \underline{b} \\
-\underline{c}^T & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma
\end{array}
$$

la sol ammissibile di base iniziale va determinata con la 1^ fase dell'algoritmo del simplesso, e poi di seguito per giungere alla soluzione ottima si procede con la 2^ fase.

Sapendo che l'ottimo della f.o. è "associato" ad una tableau in cui v.b. sono nell'ordine s_1, x_4, x_2, allora nel tableau iniziale la base dell'ottimo è

$$
B = \begin{array}{ccc}
s_1 & x_4 & x_2 \\
\hline
1 & 0 & -1 \\
0 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 3
\end{array}
$$

Come determinare a partire da questa il tableau finale?

Calcolando l'inversa B^{-1} si ha

$$
B^{-1} = \frac{1}{6}
\begin{array}{ccc}
s_1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_3 \\
\hline
6 & -1 & 2 \\
0 & 3 & 0 \\
0 & -1 & 2
\end{array}
$$

Quindi del tableau finale si avranno le colonne relative alle variabili s_1 $\overline{s}_2$ $\overline{s}_3$, per determinare i valori relativi alle variabili decisionali si procede calcolando per ogni colonna a_k il prodotto $B^{-1}\underline{a}_k$ e si ottiene il tableau

$$T_f = \begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & s_1 & \overline{s}_2 & \overline{s}_3 & \varphi & b \\ \hline 11/6 & 0 & 1/3 & 0 & 1 & 1/6 & -1/3 & 0 & \\ -1/2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & \\ 5/6 & 1 & -2/3 & 0 & 0 & 1/6 & -1/3 & 0 & \end{array}$$

si noti che nella colonna delle variabili surplus $\overline{s}_2$ $\overline{s}_3$ le componenti hanno il segno cambiato.

Come faremo a determinare i termini noti?
Ricordiamo che i termini noti del tableau finale si determinano con la relazione

$b' = B^{-1}\underline{b}$ quindi si ha :

$$B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Il tableau finale si completa di una altra colonna

$$T_f = \begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & s_1 & \overline{s}_2 & \overline{s}_3 & \varphi & b \\ \hline 11/6 & 0 & 1/3 & 0 & 1 & 1/6 & -1/3 & 0 & 17/2 \\ -1/2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 21/2 \\ 5/6 & 1 & -2/3 & 0 & 0 & 1/6 & -1/3 & 0 & 3/2 \end{array}$$

Come si farà a determinare i coefficienti di costo relativo?
Per le variabili scarto e surplus si ha:

$$\underline{c}_B^T B^{-1} = (0, 2, 1) \begin{bmatrix} 1 & -1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/6 & 1/3 \end{bmatrix} = (0, -5/6, -1/3)$$

il segno dipende dalla natura delle variabili: le variabile surplus s_1 $\overline{s}_2$ $\overline{s}_3$ presentano i coefficienti di costo relativo di segno positivo, nel tableau sarà negativo

Per le variabili decisionali i coefficienti di costo relativo saranno:

$$\underline{c}_B^T B^{-1} A - \underline{c}_N^{\,T} = (0, -5/6, -1/3) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} - (\ldots\ldots\ldots\ldots) = (-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Il tableau diventa

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	$\overline{s_2}$	$\overline{s_3}$	φ	b
$T_f =$	11/6	0	1/3	0	1	1/6	-1/3	0	17/2
	-1/2	0	1	1	0	-1/2	0	0	21/2
	5/6	1	-2/3	0	0	1/6	-1/3	0	3/2
	-13/6	0	-5/3	0	0	-5/6	-1/6	1	

in ultimo possiamo determinare il valore ottimo della funzione: $\varphi = \underline{c}_B B^{-1}\underline{b}$

alla fine il tableau risulta

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	$\overline{s_2}$	$\overline{s_3}$	φ	b
$T_f =$	11/6	0	1/3	0	1	1/6	-1/3	0	17/2
	-1/2	0	1	1	0	-1/2	0	0	21/2
	5/6	1	-2/3	0	0	1/6	-1/3	0	3/2
	-13/6	0	-5/3	0	0	-5/6	-1/6	1	45/2

Osservando il tableau si deduce che la soluzione ottima è $x_1 =$, $x_2 =$, $x_3 =$, $s_1 =$, $\overline{s_2} =$, $\overline{s_3} =$, e $\varphi =$.

1) Come cambierebbe la soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo diventasse 15?
2) Come cambierebbe la soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo diventasse 25?
3) Come cambierebbe la soluzione ottima se si aggiungesse una variabile x_5 con coefficiente 2 nella f.o. e tale da modificare il primo ed il secondo vincolo come segue

$$\min \varphi = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5$$
$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 + x_3 + x_5 \le 7$$
$$-x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \ge 21$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 15$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Risolvere
....