ALGORITMO DEL SIMPLESSO
CASI PARTICOLARI

ESEMPIO 1
SOLUZIONI DEGENERI

Si dice degenere una soluzione di base per la quale una v. b. è nulla.

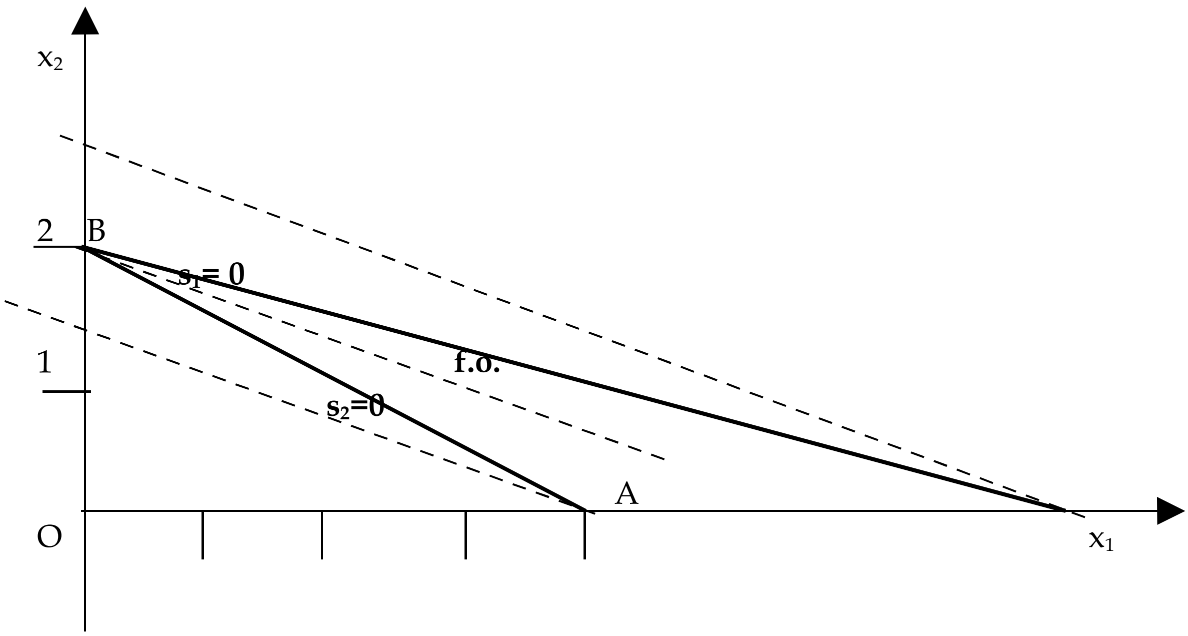
Risolvere il seguente problema

$\max \omega = 3x_1 + 9x_2$ $\qquad\qquad$ $\min \varphi = -3x_1 - 9x_2$

s. a. $\quad x_1 + 4x_2 \leq 8$

$\qquad\quad x_1 + 2x_2 \leq 4$

$\qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0$



La soluzione ottima si trova nel vertice B, nel quale sono attivi il 1^ ed il 2^ vincolo tecnico ed il vincolo di segno $x_2 \geq 0$.

Il punto B può essere rappresentato come soluzione di base rispetto tre basi

1) se $x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B_1 = [x_2, s_2]}$

2) se $x_N = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B_2 = [x_1, x_2]}$

3) se $x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B_3 = [x_2, s_1]}$

dove x_i ed s_i sono colonne del tableau ed F è la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\ A\ ,\ I\ ]$

1) Determinazione del tableau T_1 associato alla base B_1

x_1	x_2				
1	4	1	0	0	8
1	2	0	1	0	4
3	9	0	0	1	0

si può determinare il tableau relativo alla base $\mathbf{B_1 = [x_2, s_2]}$, facendo entrare in base x_2, e deve uscirne s_1. (Nel tableau la seconda colonna dovrà diventare $\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}$, quindi si devono svolgere operazioni elementari di riga con l'elemento 4 (1^ riga 2^ colonna) come pivot.

Si otterrà il tableau T_1:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{9}{4} & 0 & 1 & -18 \end{bmatrix}$$

che evidenzia la soluzione di base associata a B_1 : $\underline{x} = \begin{matrix}0\\2\\0\\0\end{matrix}$, punto in cui il valore della f.o. è

$\varphi = -18$ quindi $\omega = 18$

i coefficienti di costo relativo sono: $r_1 = 3/4$, $r_3 = -9/4$

A partire dal tableau T_1, è possibile costruire il tableau T_2

2) Determinazione del tableau T_2 associato alla base B_2

si può determinare il tableau relativo alla base $\mathbf{B_2 = [x_1, x_2]}$, facendo entrare in base x_1, e deve uscirne s_2. (Nel tableau la prima colonna dovrà diventare $\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}$, quindi si devono svolgere operazioni elementari di riga con l'elemento 1/2 (2^ riga 1^ colonna) come pivot.

Si otterrà il tableau T_2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & -18 \end{bmatrix}$$

che evidenzia la soluzione di base associata a B_2 : $\underline{x} = \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$, punto in cui il valore della f.o. è

$\varphi = - 18$ quindi $\omega = 18$

i coefficienti di costo relativo sono : $r_3 = -3/2$, $r_4 = -3/2$

3) Determinazione del tableau T_3 associato alla base B_3

si può determinare il tableau relativo alla base $\mathbf{B_3 = [x_2, s_1]}$, partendo dal tableau iniziale e facendo entrare in base la variabile x_2, e deve uscirne s_2. (Nel tableau la seconda colonna dovrà diventare $\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$, quindi si devono svolgere operazioni elementari di riga con l'elemento 2 (2^ riga 2^ colonna) come pivot.

$\overline{r_2} = 1/2 r_2$	1/2	1	0	1/2	0	0

$\overline{r_1} = r_1 - 4\overline{r_2}$	1	4	1	0	0	8
	…..	-4	…….	…..	….	….
	……	0	…..	……	….	…

$\overline{r_0} = r_0 - 9\overline{r_2}$	3	9		0	1	0
	-……		…….	-…..	0	….
	-…..	0	0	-….	1	-….

Si otterrà il tableau T_3:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & & 0 & \\ -\frac{\dots}{\dots} & 0 & 0 & -\frac{\dots}{2} & 1 & -\dots \end{bmatrix}$$

che evidenzia la soluzione di base associata a B_3 : $\underline{x} = \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$, punto in cui il valore della f.o. è

$\varphi = -18$ quindi $\omega = 18$
i coefficienti di costo relativo sono: $r_1 = -3/2$, $r_3 = -9/2$

- **Condizione di ottimalità in caso di degenerazione :**

"$\underline{x}$ è soluzione di base ottimale SE E SOLO SE esiste una sua base rispetto alla quale i coefficienti di costo relativo sono non positivi"

Da un punto di vista pratico la degenerazione rivela che un vincolo è ridondante.

Un vertice della regione ammissibile in R^n è caratterizzato dall'annullarsi di più componenti

In corrispondenza di una soluzione di base ammissibile DEGENERE può accadere che la soluzione di base ad essa adiacente, e tutte le successive generate dall'algoritmo del simplesso siano associate allo stesso vertice determinando un ciclo che impedisce di arrivare alla soluzione.

Come evitare il ciclo ?

- se tra i rapporti che consentono di individuare l'elemento pivot ve ne sono vari minimi si sceglie quello relativo all'indice (di riga) più basso

ESEMPIO 2

Risolvere il seguente problema

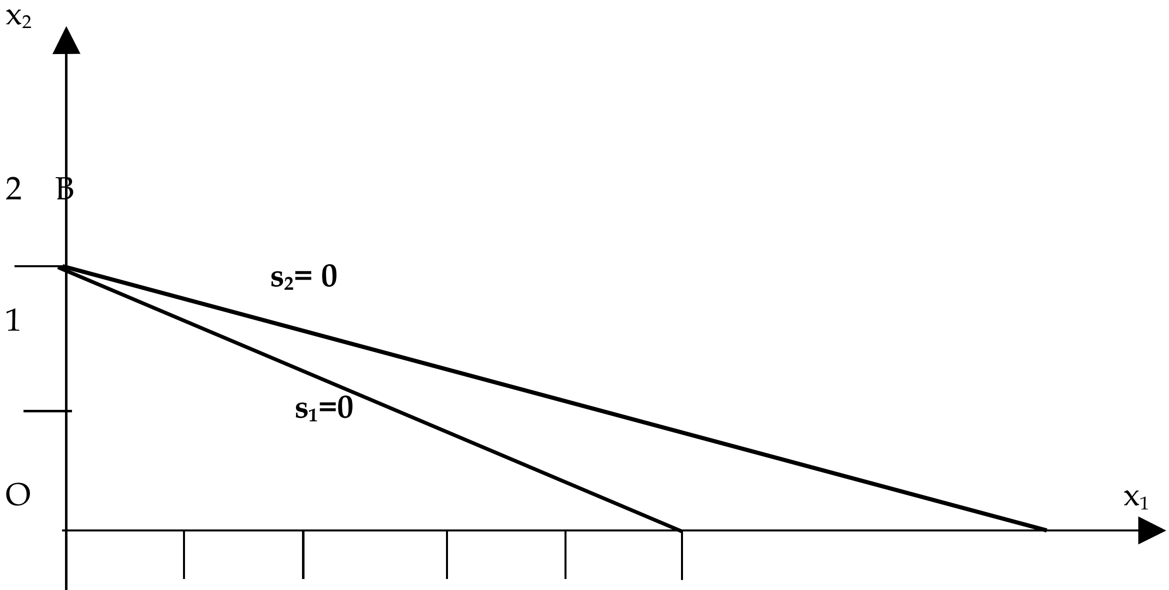
$\max \omega = x_1 + 3x_2$ $\qquad\qquad$ $\min -x_1 - 3x_2$

s. a. $\quad 2x_1 + 5x_2 \leq 10$ $\qquad\qquad$ s. a. $2x_1 + 5x_2 + s_1 = 10$

$\qquad x_1 + 4x_2 \leq 8$ $\qquad\qquad$ $x_1 + 4x_2 + s_2 = 8$

$\qquad x_1, x_2 \geq 0$ $\qquad\qquad$ $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Determiniamo le varie basi associate al modello



$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & s_1 & \mathbf{s_2} & & \textbf{t. noti} \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sono in base s_1 ed s_2 e fuori base x_1 ed x_2 , eseguiamo una operazione di riga facendo entrare in base x_2, possono uscire s_1 o s_2.

Determiniamo il tableau relativo alla base B_1 svolgiamo operazioni elementari di riga sul tableau, con l'elemento 5 (1^ riga 2^ colonna) come pivot.

$\overline{r_1} = \frac{1}{5} r_1 \qquad$ 2/5 $\quad$ 1 $\quad$ 1/5 $\quad$ 0 $\quad$ 0 $\quad$ 2

$\overline{r_2} = r_2 - 4\overline{r_1}$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ -\ldots. & -\ldots. & \ldots\ldots & 0 & 0 & -\ldots. \\ \hline -\ldots\ldots & 0 & -\ldots\ldots & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$\overline{r_0} = r_0 - 3\overline{r_1}$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\ldots\ldots & -3 & -\ldots\ldots & 0 & 0 & -\ldots. \\ \hline -\ldots\ldots & 0 & -\ldots\ldots & 0 & 1 & -\ldots. \end{array}$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 2 \\ -\frac{\dots}{\dots.} & 0 & -\frac{\dots.}{\dots.} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\dots..}{\dots...} & 0 & -\frac{\dots.}{\dots.} & 0 & 1 & -\dots \end{bmatrix}$$

Determiniamo il tableau relativo alla base B_2 svolgiamo operazioni elementari di riga su T con l'elemento 4 (2^ riga 2^ colonna) come pivot.

$$\bar{r}_2 = \frac{1}{4} r_2 \qquad \begin{array}{cccccc} 1/4 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\bar{r}_1 = r_1 - 5\bar{r}_2 \qquad \begin{array}{cccccc} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ -\dots.. & -\dots.. & 0 & -\dots... & 0 & -\dots. \\ \hline \dots.. & \dots. & 1 & -\dots. & 0 & \dots.. \end{array}$$

$$\bar{r}_0 = r_0 - 3\bar{r}_2 \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\dots.... & -\dots.. & 0 & -\dots... & \dots & -\dots \\ \hline \dots.. & 0 & 0 & -\dots.. & 1 & -\dots \end{array}$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 1 & -\frac{\dots}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\dots.}{\dots} & 1 & 0 & \frac{\dots.}{4} & 0 & 2 \\ \frac{\dots.}{\dots..} & 0 & 0 & -\frac{\dots.}{4} & 1 & -\dots. \end{bmatrix}$$

$x_1 = s_2 = 0$ e $x_2 = 2$ e $s_1 = 0$

i coefficienti delle variabili non di base sono tutti negativi

Determiniamo il tableau relativo alla base B_3

$$\bar{r}_1 = \frac{1}{2} r_1 \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

$$\bar{r}_2 = r_2 - \bar{r}_1 \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & \dots.. \\ -\dots & -\dots./2 & -\dots/2 & 0 & 0 & -\dots. \\ \hline \dots. & \dots./2 & -\dots/2 & 1 & 1 & \dots.. \end{array}$$

$$\bar{r}_0 = r_0 - \bar{r}_1 \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\dots.. & -\dots../2 & -/2 & 0 & 0 & -\dots \\ \hline \dots.. & \dots./2 & -\dots/2 & 0 & 1 & -\dots \end{array}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -0 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{...}{2} & -\frac{1}{...} & 1 & 0 & ... \\ 0 & \frac{1}{...} & -\frac{1}{...} & 0 & 1 & -... \end{bmatrix}$$

$x_1 = 5$ $x_2 = 0$ $s_1 = 0$ e $s_2 = 3$

i coefficienti delle variabili non di base non sono tutti negativi

In ultimo determiniamo la base B_4………

ESEMPIO 3 .
SOLUZIONI OTTIME ALTERNATIVE

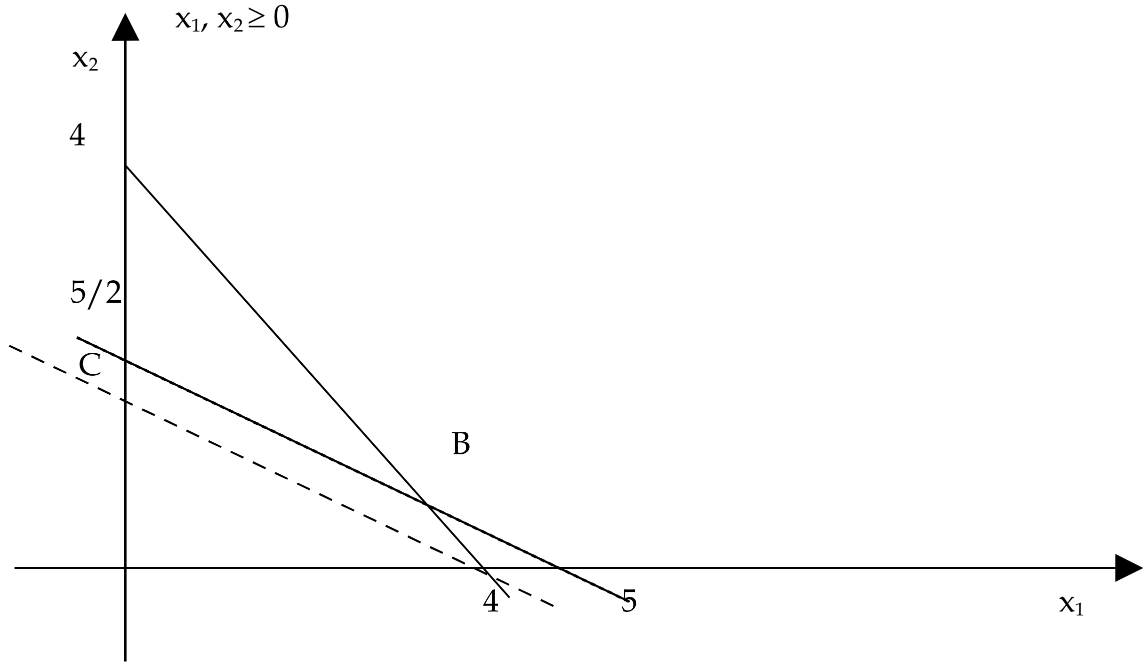
Supponendo di aver determinato la soluzione ottima x^*, se la f.o. risultasse aver linee di livello parallele ad un vincolo attivo in x^*, allora la f.o. assume lo stesso valore ottimale in una infinità di soluzioni , dette **OTTIMI ALTERNATIVI**.

max $\omega = 2x_1 + 4x_2$ min $\varphi = -2x_1 - 4x_2$

s.a. $x_1 + 2x_2 \leq 5$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$



Ricavando così la soluzione graficamente si ha che vi sono soluzioni ottime alternative corrispondenti ai punti del segmento BC.

Risolvendo con l'algoritmo del simplesso si arriva al tableau finale:

v.b. (x_1, x_2)

che evidenzia $x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

T

x_1	x_2	s_1	s_2	φ	b
0	1	1	-1	0	1
1	0	-1	2	0	3
0	0	-2	**0**	1	-10

ossia il vertice B, con φ = -10 (ω = 10) , **ed r_4 = 0**
portando in base la variabile s_2 esce di base x_1, in quanto elemento pivot è 2 quindi s_2 diventa la seconda v.b. e si ottiene il tableau

T

x_1	x_2	s_1	s_2	φ	b
1/2	1	1/2	0	0	5/2
1/2	0	-1/2	1	0	3/2
0	0	-2	0	1	-10

si evidenzia la soluzione ancora ottima $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ ossia il vertice C, con φ = -10 (ω = 10)

Il metodo del simplesso consente di determinare solo i vertici ottimi alternativi e possiamo esprimere l'insieme di tutti i punti di "ottimo" come combinazione convessa di B e C.

$$\underline{x^\wedge} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ \frac{5}{2} - \frac{3}{3}\alpha \\ 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\alpha \end{pmatrix} \quad \text{con } 0 \le \alpha \le 1$$

se α = 0 o α = 1: soluzioni OTTIME DI BASE
se 0 < α < 1: soluzioni OTTIME NON DI BASE

*** L'esistenza di soluzioni ottime alternative, nello sviluppo dell'algoritmo del simplesso si evidenziano quando, giunti all'ottimo della f.o. nella ultima riga del tableau un coefficiente di costo relativo di una v.n.b. è 0, e portando in base questa v.n.b. la f.o. assume lo stesso valore**

ESEMPIO 4.
SOLUZIONI ILLIMITATE

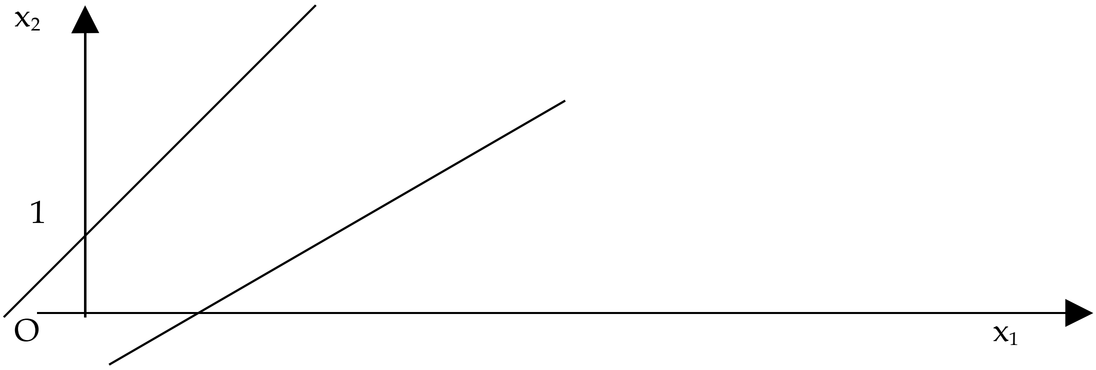
Si consideri il problema

$\max \omega = x_1 + x_2 \longrightarrow \min \varphi = -x_1 - x_2$

s.a. $-x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 - 2x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$



Graficamente si può osservare che la r.a. è illimitata.

Risolvendo con l'algoritmo del simplesso si parte dal seguente tableau:

	x_1	x_2	s_1	s_2	φ	b
	-1	1	1	0	0	1
T	1	-2	0	1	0	2
	1	1	0	0	1	0

v.b. (s_1, s_2)

Soluzione ammissibile di base iniziale (0, 0, 1, 2)

Fase 2
Passo 1 entra in base x_1 ed esce s_2

$\overline{r_2} = r_2$	1	-2	0	1	0	2
$\overline{r_1} = r_1 + \overline{r_2}$	…	….	….	….	….	…
	…	….	….	….	….	…
	…	….	….	….	…..	…
$\overline{r_0} = r_0 - \overline{r_2}$	…	….	….	….	….	…
	…	….	….	….	….	…
	…	….	….	….	…..	…

Dal tableau

	x_1	x_2	s_1	s_2	φ	b
	0	-…	…	..	0	…
T	1	-…	…	1	0	…
	0	..	0	-1	1	-...

$$\varphi = -\ldots$$

Si vede che non si è giunti ad una soluzione ottimale risultando ancora positivo il coefficiente di costo relativo associato alla v.n.b. x_2.

Dovendo portare in base x_2 che è n.b., si potranno esprimere le v.b. $\mathbf{x_1}$ **ed** $\mathbf{s_1}$ in termini di x_2 senza violare i vincoli, cioè:

$$\mathbf{x_1 = 3 + x_2 \geq 0 \qquad x_2 \geq -3}$$
$$\mathbf{s_1 = 2 + 2\,x_2 \geq 0 \qquad x_2 \geq -1}$$

Da quanto visto risulta che la r.a. e la f.o. sono illimitate il modello è costruito male.