ANALISI DI SENSITIVITA' O DI POST – OTTIMALITA'(a)

Nelle situazioni reali, i dati di un problema di p-l possono subire delle variazioni dovute ad imprecisioni di misura o a dinamiche proprie del sistema allo studio. Diventa, quindi importante studiare la stabilità della soluzione ottima al variare dei dati del problema.

Si consideri il problema di programmazione lineare

$\min \underline{c}^T \underline{x}$

$A\underline{x} + \underline{s} = \underline{b}$

$\underline{x}, \underline{s} \geq 0$

Sia B una base ammissibile ottima, la corrispondente soluzione ottima di base

è $\underline{x} = (\underline{x}_B, 0)$ con $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$

le condizioni di ammissibilità e di ottimalità per la base B sono

a) $B^{-1}b \geq 0$ e b) $\underline{r}_n^T \leq 0$

L'analisi di sensitività studia le variazioni dei dati del problema per le quali le condizioni a) e b) restano invariate.

Si possono studiare variazioni relativamente ai :

- termini noti dei vincoli $\underline{b}$
- coefficienti $\underline{c}^T$ della funzione obiettivo da minimizzare
- coefficienti dei vincoli A
- all'introduzione di nuovi vincoli

rispondendo a richieste del tipo

- di quanto si deve aumentare la disponibilità di una risorsa per migliorare il valore ottimale della f.o.?
- di quanto si possono variare i prezzi unitari senza modificare la scelta di produzione ottimale?
- L'introduzione di un nuovo vincolo farà perdere l'ammissibilità?

ESEMPIO 1

Si devono produrre i beni P_1 e P_2 e tre sono le risorse disponibili R_1 R_2 R_3 (misurate in ore).

La tabella relativa all'utilizzo ed alla disponibilità delle risorse è

	P_1	P_2	
R_1	1	0	4
R_2	0	2	24
R_3	3	2	18
Profitti	3	5	

Il modello matematico è:

$$\begin{array}{ll} \max \omega = 3x_1 + 5x_2 & \\ \text{s.a.} \quad x_1 \le 4 & \\ \qquad 2x_2 \le 24 & \Longrightarrow \quad \min \phi = -3x_1 - 5x_2 \\ \qquad 3x_1 + 2x_2 \le 18 & \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0 & \end{array}$$

cioè da

$$\begin{array}{lcl} \max \omega = p\underline{x}_M & \text{a} & \min \phi = c\underline{x}_M \\ \text{s.a.} \quad A\underline{x}_M \le 0 & & \text{s.a.} \quad A\underline{x}_M \le 0 \\ \qquad x_M \ge 0 & & \qquad x_M \ge 0 \end{array}$$

dove p = -c e quindi –p = c

Il tableau iniziale è

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ϕ	b
1	0	1	0	0	0	4
0	2	0	1	0	0	24
3	2	0	0	1	0	18
3	5	0	0	0	1	0

e dopo lo sviluppo dell'algoritmo del simplesso arrivati al valore ottimo della f.o. il tableau finale risulta

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ϕ	b
1	0	1	0	0	0	4
3/2	1	0	0	1/2	0	9
-3	0	0	1	-1	0	6
-9/2	0	0	0	-5/2	1	-45

e la soluzione ottima è x = (0, 9, 4, 6, 0)

Il tableau finale associato alla base ottima, si ottiene dal tableau iniziale premoltiplicandolo per l'inversa della base ottima.

Detta B la base ottimale, orlandola si ottiene $B_+ = \begin{bmatrix} B & \underline{0} \\ -\underline{c}_B^T & 1 \end{bmatrix}$ sarà $B_+^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & \underline{0} \\ \underline{c}_B^T\, B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$

e quindi si avrà:

$$\begin{bmatrix} B^{-1} & \underline{0} \\ \underline{c}_B^T\ B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & [I] & \underline{0} & \underline{b} \\ -\underline{c}^T & \underline{0}^T & 1 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}A & [B^{-1}] & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \underline{c}_B^T\ B^{-1}A - \underline{c}^T & \underline{c}_B^T\ B^{-1} & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma \end{bmatrix}$$

che è la rappresentazione del tableau finale in funzione di quello iniziale.

B^{-1}	Inversa della base che si legge nel tableau finale in corrispondenza delle variabili scarto o surplus
$B^{-1}A$	Prodotto della inversa della base per la matrice dei coefficienti delle v. decisionali dei vincoli
$B^{-1}\underline{b}$	Valori delle x_B v. b.
$\underline{c}_B^T B^{-1} A - \underline{c}^T$	Vettore dei coefficienti di costo relativo v. decisionali (= 0 quelle delle v. b. e $\neq$ 0 quelle delle v. n. b. (*))
$\underline{c}_B^T B^{-1}$	Prezzi ombra
$\underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} + \gamma$	Valore della f.o.

(*) Qualora si dovessero determinare i coefficienti di costo relativo del tableau finale di v.n.b. che non siano variabili decisionali si userà la relazione

$$\underline{r}_n^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N{}^T$$

dove N sono le colonne delle variabili n.b. e $\underline{c}_N^T$ è il corrispondente coefficiente di costo del tableau iniziale, infatti il tableau ottimo riordinato è T = $\begin{bmatrix} B^{-1}N & B^{-1}\underline{b} & I & \underline{0} \\ \underline{c}_B^T\ B^{-1}N - \underline{c}_N^T & \underline{c}_B^T B^{-1} + \gamma & \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$

Nell'esempio

tableau iniziale

			I			
1	0	1	0	0	0	4
0	2	0	1	0	0	24
3	2	0	0	1	0	18
3	5	0	0	0	1	0

tableau finale

			B^{-1}			
1	0	1	0	0	0	4
3/2	1	0	0	1/2	0	9
-3	0	0	1	-1	0	6
-9/2	0	0	0	-5/2	1	-45

La base ottima relativa al tableau iniziale è costituita nell'ordine dalle colonne 3^, 2^, 4^ quelle che nel tableau finali sono i vettori colonna e_1, e_2, e_3 :

B =

3^	2^	4^
1	0	0
0	2	1
0	2	0

L'inversa della base è

B^{-1} =

1	0	0
0	0	1/2
0	1	-1

e si legge nel tableau finale in corrispondenza delle colonne delle variabili s_1, s_2, s_3.

1. VARIAZIONE DEL TERMINE NOTO DI UN VINCOLO $\underline{b}$

- riguarda l'ammissibilità-

$$\begin{bmatrix} B^{-1}A & [B^{-1}] & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \underline{c}_B^T\, B^{-1}A - \underline{c}^T & \underline{c}_B^T\, B^{-1} & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b}+\gamma \end{bmatrix}$$

Con la variazione di b variano

1) $\mathbf{B^{-1}\underline{b}}$ (determinazione delle v.b.) e 2) $\underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b}+\gamma$ (valore della f.o.)

risulta $\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_i\delta$ e sostituendo $\underline{\tilde{b}}$ a $\underline{b}$ si ottiene:

$B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}(\underline{b}+\underline{e}_i\delta) = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e}_i\delta$

$B^{-1}\underline{b} = x_B$

$B^{-1}\underline{e}_i\delta$ = i-esima colonna della inversa base nel tableau finale,

$B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \tilde{x}_B = x_B + B^{-1}\underline{e}_i\delta = x_B + \Delta x_B$

2) $\tilde{\phi} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{\tilde{b}}+\gamma = \underline{c}_B^T B^{-1}(\underline{b}+\underline{e}_i\delta)+\gamma = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b}+\gamma + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_i\delta$

ma $\underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b}+\gamma = \phi$ quindi $\tilde{\phi} = \phi + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_i\delta$

Variazione del termine noto del 1° vincolo

$$\tilde{x}_B = \begin{bmatrix}4\\9\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\delta \rightarrow \left| \begin{array}{l} 4+\delta \geq 0 \\ 9 \geq 0 \\ 6 \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow \delta \geq -4 \qquad \underline{\tilde{b}}_1 \geq 0$$

la composizione della base ottima resta invariata per valori di $\underline{\tilde{b}}_1 \in [........,......[$

e risulterà

$\tilde{\phi} = -45 + 0\delta = -45 = \phi$ *la funzione non varia, perché il 1^ vincolo non è attivo nell'ottimo*

Variazione del termine noto del 3° vincolo

$$\tilde{x}_B = \begin{bmatrix}4\\9\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1/2\\-1\end{bmatrix}\delta \rightarrow \left| \begin{array}{l} 4 \geq 0 \\ 9+1/2\,\delta \geq 0 \\ 6-\delta \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} 4 \geq 0 \\ \delta \geq -18 \\ \delta \leq 6 \end{array} \right. \rightarrow -18 \leq \delta \leq 6 \qquad 0 \leq \underline{\tilde{b}}_3 \leq 24$$

la composizione della base ottima resta invariata per valori di $\underline{\tilde{b}}_3 \in [.......,.......]$

e risulterà

$$\tilde{\phi} = -45 + [0,\ 0\ \ -5/2] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta = -45 - (5/2)\delta$$

$\delta = -18 \quad \tilde{\phi} = -45 + 45 = 0$

$\delta = 6 \quad \tilde{\phi} = -45 - 15 = -60$

$$-60 \le \tilde{\phi} \le 0$$

Si deduce che la variazione di disponibilità della 3^ risorsa nell'intervallo determinato, lascia invariata la base ottima, cioè continua ad essere conveniente produrre più P_2 che P_1

2. VARIAZIONE DI UN COEFFICIENTE DI COSTO $\underline{p}$ e quindi $\underline{c}$

-riguarda l'ottimalità-

Possono variare i coefficienti di costo di v.n.b oppure v.b e dal tableau seguente

$$\begin{bmatrix} B^{-1}A & [B^{-1}] & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \underline{c}_B^T\, B^{-1}A - \underline{c}^T & \underline{c}_B^T\, B^{-1} & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma \end{bmatrix}$$

si possono individuare le variazioni del tableau finale

La variazione di coefficienti di costo di v.n.b. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$ comporta variazioni dei termini

$\tilde{\underline{p}}_N = \underline{p}_N + \underline{e}_i\delta$

$\tilde{\underline{c}}_N = \underline{c}_N - \underline{e}_i\delta$ e quindi

$\underline{r}_n^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N{}^T$

- Variazione di $p_1 = 3$

$$c_1 = -3 \text{ (v.n.b.) quindi } \tilde{\underline{c}}_N = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\delta = \begin{bmatrix} -3-\delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Risulterà:

$$\underline{r}_n^T = \underline{c}_B^T B^{-1} A - \underline{c}^T \rightarrow \tilde{\underline{r}}_n^T = [\underline{c}_B^T B^{-1} A - \underline{c}^T] - \underline{e}_j^T\delta = \underline{r}_n^T - \underline{e}_j^T\delta$$

varia solo il costo relativo delle v.n.b. di cui è variato il costo della f.o.

Indicata con x_i una v.n.b., risulta $\tilde{c}_i = c_i - \delta$ e quindi $\tilde{r}^T{}_i = r_i^T + \delta$

$$\underline{r}_i^T = \begin{cases} < 0 \text{ la base ottima dopo una variazione è ancora ottima} \\ = 0 \text{ soluzioni ottime alternative a quelle precedenti} \\ > 0 \text{ la base non è più ottima e } x_i \text{ deve essere portata in base} \end{cases}$$

Determinare l'intervallo dei valori di δ riferiti a c_1 che lasciano invariata la base ottimale

$\tilde{c}_1 = c_1 - \delta$ = - 3 -δ

$\tilde{r}_1 = r_1 + \delta = -\frac{9}{2} + \delta \le 0 \to \delta \le +\frac{9}{2}$ quindi $\tilde{c}_1 \ge -3 - \frac{9}{2} \ldots \ldots \quad \tilde{c}_1 \ge -\frac{15}{2}$

$\tilde{p}_1 \le \frac{15}{2}$

(*)Se risultasse $\delta = +5$, allora $\tilde{c}_1$ = - 3 - 5= - 8 e $\tilde{r}_1 = -\frac{9}{2} + 5 = \frac{1}{2} \ge 0$, pertanto si perde l'ottimalità , x_1 dovrà entrare in base.

La variazione di coefficienti di costo di v.b. x = $\begin{bmatrix} s_1 \\ x_2 \\ s_2 \end{bmatrix}$ comporta variazioni dei termini

$\tilde{\underline{p}}_B = \underline{p}_B + \underline{e}_j\delta$

$\tilde{\underline{c}}_B = \underline{c}_B - \underline{e}_j\delta$ e quindi dei coefficienti di costo

- $\underline{r}_n^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N{}^T$

  $\Rightarrow \tilde{\underline{r}}_N^T = (\underline{c}_B^T - \underline{e}_j^T\delta)\ B^{-1}N - \underline{c}_N^T = \ldots\ldots\ldots = \underline{r}_n^T - e_j^T\delta B^{-1}N$ con $e_j^T\delta B^{-1}N$ j-esima riga del tableau finale relativa alle sole v.n.b. se j è l'ordine della variabile b. cui è relativo c_B)

e

- $\underline{c}_B^T B^{-1} b + \gamma$, cioè della f.o $\phi = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} + \gamma$

  $\Rightarrow \tilde{\phi} = (\underline{c}_B - \underline{e}_j^T\delta)\ B^{-1}\underline{b} + \gamma = \ldots\ldots\ldots = \phi - e_j^T\delta B^{-1}\underline{b}$ con $e_j^T\delta B^{-1}\underline{b}$ valore della j-esima v. b.**).**

- **Variazione di p_2 = 5 (quindi c_2 = - 5)** relativa alla v. x_2 seconda v.b.

quindi c_2= - 5 e nell'ordine $\underline{c}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{c}}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} - \underline{e}_2\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\delta$

$\tilde{c}_2$ = - 5 - δ

$$\tilde{\underline{r}}^T{}_N = \left[-\frac{9}{2}, -\frac{5}{2}\right] - \left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]\delta = \left[-\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\delta \ , -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\delta\right]$$

Affinché la base rimanga ottima deve risultare

$\tilde{\underline{r}}_1 = \left[-\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\delta\right] \le 0 \to \delta \ge -3 \qquad \tilde{\underline{r}}_5 = \left[-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\delta\right] \le 0 \to \delta \ge -5$

$\begin{cases} \delta \ge -3 \\ \delta \ge -5 \end{cases}$ e quindi $\delta \ge -3$, quindi $\tilde{c}_2 \ge -5 + 3 \ge -2 \qquad \tilde{p}_2 \le 2$

La funzione obiettivo diventa $\tilde{\phi} = -45 - 9\delta$ cioè $\tilde{\phi} \leq -18$

3. **VARIAZIONE DI UN ELEMENTO DI A**
-riguarda l'ottimalità-

1) può variare un elemento della colonna **$\underline{a}_i$ non di base** nel tableau finale

$$\begin{bmatrix} B^{-1}A & \left[B^{-1}\right] & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \underline{c}_B^T\, B^{-1}A - \underline{c}^T & \underline{c}_B^T\, B^{-1} & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma \end{bmatrix}$$

[1] $\underline{a}_i' = B^{-1}\underline{a}_i$ risulterà $\tilde{\underline{a}}_i = \underline{a}_i + e_j\delta$

Nel caso in esame nel tableau finale colonna non di base relativa a **variabili decisionali** è la prima $\underline{a}_1$

1	0	1	0	0	0	4
3/2	1	0	0	1/2	0	9
-3	0	0	1	-1	0	6
-9/2	0	0	0	-5/2	1	-45

l' omologa nel tableau iniziale è

1	0	1	0	0	0	4
0	2	0	1	0	0	24
3	2	0	0	1	0	18
3	5	0	0	0	1	0

le colonne relative a v.n.b. sono

$$N = \begin{array}{cc} 1^\wedge & 3^\wedge \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{array}$$

Se varia la terza componente della colonna a_1

$$\tilde{\underline{a}}_1 = \underline{a}_1 + e_3\delta = \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\delta = \begin{bmatrix}1\\0\\3+\delta\end{bmatrix}$$

dei coefficienti di costo relativo $\underline{r}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} A - \underline{c}^T$ oppure $\underline{r}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}^T$

varia solo l' elemento $\underline{r}_1 = \; = \underline{c}_B^T B^{-1}\tilde{a}_1 - \underline{c}_1$

con $\underline{c}_B^T B^{-1}$ ultima riga del tableau in corrispondenza v. b. iniziali [0 0 -5/2]

con $\tilde{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\3+\delta\end{bmatrix}$ e $\underline{c}_1 = -3$

quindi $\tilde{\underline{r}}_1 = [0, 0, -5/2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3+\delta \end{bmatrix} - (-3) = -\frac{15}{2} - \frac{5}{2}\delta + 3 = -\frac{9}{2} - \frac{5}{2}\delta$

se $\tilde{\underline{r}}_1 \leq 0$ la base è ancora ottima [per $\delta \geq -\frac{9}{5}$]

se $\tilde{\underline{r}}_1 \geq 0$ la base non è ottima [per $\delta < -\frac{9}{5}$], va portato in base x_1 con il metodo del simplesso.

4.AGGIUNTA DI UN NUOVO VINCOLO
-riguarda l'ammissibilità-

Supponiamo di aggiungere un nuovo vincolo $2x_1 + 3x_2 \leq 24$, tale vincolo rende non ammissibile la soluzione ottima.

Soluzione ottima (0,9) **2(0) +3(9) ≤ 24 !!!!**

Il vincolo in termini di uguaglianza è $2x_1 + 3x_2 + s_4 = 24$, pertanto il tableau è:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ϕ	b
1	0	1	0	0	0	0	4
3/2	1	0	0	1/2	0	0	9
-3	0	0	1	-1	0	0	6
2	**3**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**24**
-9/2	0	0	0	-5/2	0	1	-45

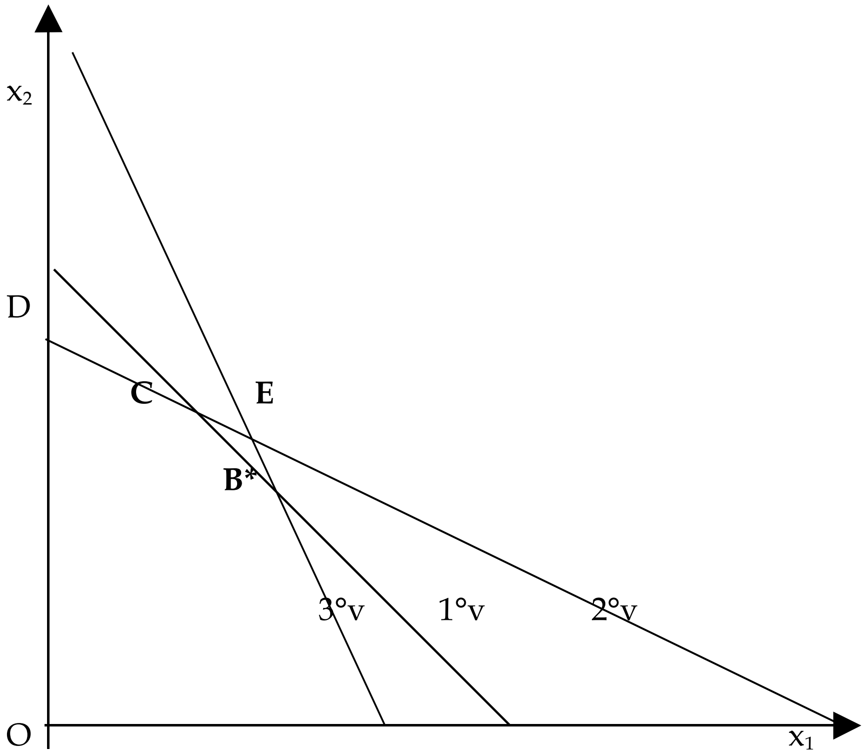
Esprimendo s_4 intermini di v.n.b. si ha $s_4 = 24 - 2x_1 - 3x_2$, pertanto il tableau diventa

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ϕ	b
1	0	1	0	0	0	0	4
3/2	1	0	0	1/2	0	0	9
-3	0	0	1	-1	0	0	6
-5/2	0	0	0	-3/2	1	0	-3
-9/2	0	0	0	-5/2	0	1	-45

L'ultima riga resta invariata, quindi l'ottimo si conserva, ma per la negatività del termine noto del quarto vincolo $b_4 = -3$ si è persa l'ammissibilità .

L'ammissibilità si ripristina applicando su questo tableau, l'algoritmo del simplesso duale.

ESEMPIO 2



Max $\omega = 9x_1 + 8x_2$

s.a $x_1 + x_2 \leq 10$

$10x_1 + 20x_2 \leq 180$

$8x_1 + 4x_2 \leq 56$

$x_1, x_2 \geq 0$

Min $\varphi = -9x_1 - 8x_2$

s.a $x_1 + x_2 \leq 10$

$10x_1 + 20x_2 \leq 180$

$8x_1 + 4x_2 \leq 56$

$x_1, x_2 \geq 0$

min $\varphi = -9x_1 - 8x_2$

s.a $x_1 + x_2 + s_1 = 10$

$10x_1 + 20x_2 + s_2 = 180$

$8x_1 + 4x_2 + s_3 = 56$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Tableau iniziale

$$T_i = \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & b \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 10 & 20 & 0 & 1 & 0 & 0 & 180 \\ 8 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 56 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

v.b. (s_1, s_2, s_3), v.n.b. (x_1, x_2), sol ammissibile di base iniziale (0,0, 10, 180, 56)

e dopo lo sviluppo dell'algoritmo del simplesso arrivati al valore ottimo della f.o. il tableau finale risulta –

$$T_f = \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & b \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1/4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1/4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -30 & 1 & 5/2 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -1/4 & 1 & -84 \end{array}$$

v.b. (x_1, x_2, s_2), v.n.b. (s_1, s_3), sol. ammissibile di base ottima (4,6, 0, 20, 0). -il vertice B(4, 6) nel grafico-

La base ottima nel T_i è $[x_1,x_2,s_2]$, giacchè nel T_f sono v.b proprio x_1 x_2 s_2, quindi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 10 & 20 & 1 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

e l'inversa della base che si legge nel T_f in corrispondenza delle v.scarto è

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/4 \\ 2 & 0 & -1/4 \\ -30 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$$

Di quanto può variare il termine noto di un vincolo senza che vari la composizione della base ? e tra quali valori varierebbe la f.o.?

Con la variazione di b variano i termini del tableau:

1) $\mathbf{B^{-1}\underline{b}}$ (determinazione delle v.b.) che diventa $B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \tilde{x}_B = x_B + B^{-1}\underline{e}_i\delta$
2) $\underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma$ (valore della f.o.) che diventa $\tilde{\phi} = \phi + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_i\delta$

__Variazione del termine noto del 1° vincolo__

$$\tilde{x}_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{bmatrix}\delta = \rightarrow \left| \begin{array}{l} 4-\delta \geq 0 \\ 6+2\delta \geq 0 \\ 20-30\delta \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow \ldots\ldots\ldots -3 \leq \delta \leq \frac{2}{3} \qquad \ldots\ldots \leq \underline{\tilde{b}_1} \leq \ldots\ldots\ldots$$

$B^{-1}\underline{e}_1$ nel tableau finale è la colonna che corrisponde alla v.scarto s_1

la base ottima resta invariata per valori di $\underline{\tilde{b}_1} \in [\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots]$
l'ottimo si sposta da B in E

$$\tilde{\phi} = \phi + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_1\delta = -84 + [-7\ 0\ -1/4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\delta = -84 - 7\delta$$

per $\delta = -3$ $\qquad \tilde{\phi} = -63$
per $\delta = 2/3$ $\qquad \tilde{\phi} = -266/3$

$$-266/3 \leq \tilde{\phi} \leq -63$$

__Variazione del termine noto del 2° vincolo__

$$\tilde{x}_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\delta \rightarrow \left| \begin{array}{l} 4 > 0 \\ 6 > 0 \\ 20+\delta \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow \delta \geq -20 \ \ldots \qquad \underline{\tilde{b}_2} \geq \ldots\ldots$$

$B^{-1}\underline{e}_2$ nel tableau finale è la colonna che corrisponde alla v.scarto s_2

La composizione della base ottima resta invariata per valori di $\underline{\tilde{b}_2} \in [\ldots\ldots,\ldots\ldots[$

$$\tilde{\phi} = \phi + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{e}_2 \delta = -84 + [-7\ 0\ -1/4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta = -84 - 0\delta \text{ resta invariata}$$

(Se la var. scarto di un vincolo- s_2*- è di base, allora tale vincolo –2° vincolo-non è attivo la frontiera si sposta, ma ciò è ininfluente, giacchè la frontiera non individua l'ottimo).*

<u>Variazione del termine noto del 3° vincolo</u>

$$\tilde{x}_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ 5/2 \end{bmatrix} \delta = \rightarrow \left| \begin{array}{l} 4 + 1/4\delta \geq 0 \\ 6 - 1/4\delta \geq 0 \\ 20 + 5/2\delta \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow \ldots\ldots\ldots -8 \leq \delta \leq 24 \qquad \ldots\ldots \leq \underline{\tilde{b}_3} \leq \ldots\ldots$$

$B^{-1}\underline{e}_3$ nel tableau finale è la colonna che corrisponde alla v.scarto s_3

la composizione della base ottima resta invariata per valori di $\underline{\tilde{b}_3} \in [\ldots\ldots,\ldots\ldots]$

$$\tilde{\phi} = \phi + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{e}_3 \delta = -84 + [-7, 0, -1/4] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta = -84 - (1/4)\delta$$

per $\delta = -8$ $\qquad \tilde{\phi} = -82$

per $\delta = 24$ $\qquad \tilde{\phi} = -90$

$$-90 \leq \tilde{\phi} \leq -82$$

Di quanto può variare un coefficiente di costo della f.o. senza perdere l'ottimo?

Variazione del coefficiente di costo p_1 ***della 1 ^ v.b. nel tableau finale*** x_1***:***

$\tilde{p}_1 = 9 + \delta$

$\tilde{c}_1 = -9 - \delta$ $\qquad$ e $\qquad \underline{\tilde{r}}_n^T = [-7, -1/4] - \delta[-1, 1/4]$

▲dalla 1^ riga del t.f.

$\underline{\tilde{r}}_n^T = [-7+\delta, -(1/4)-(1/4)\delta]$

Affinché la base rimanga ottima deve risultare

$-7+\delta \leq 0$

$-1/4 - 1/4\delta \leq 0$ $\qquad -1 \leq \delta \leq 7$ $\qquad \ldots\ldots\ldots \leq \tilde{c}_1 \leq \ldots\ldots\ldots$

$\tilde{\phi} = \phi - e_1^T \delta B^{-1} \underline{b} = -84 - 4\delta$ $\qquad -\ldots\ldots\ldots\ldots \leq \tilde{\phi} \leq -\ldots\ldots\ldots$

1^ el.to x_B (B^{-1} $\underline{b}$)

Variazione del coefficiente di costo p_2 ***della 2 ^ v.b. nel tableau finale*** x_2***:***

$\tilde{p}_1 = 8 + \delta$

$\tilde{c}_2 = -8 - \delta$ $\qquad$ e $\qquad \underline{\tilde{r}}_n^T = [-7, -1/4] - \delta[2, -1/4]$

▲

dalla 2^ riga del t.f.

$\tilde{\underline{r}}_n^T = [-7-2\delta, -1/4 + (1/4)\delta]$

Affinché la base rimanga ottima deve risultare

$-7-2\delta \leq 0$

$-1/4 - 1/4\delta \leq 0$ $\qquad -\ldots \leq \delta \leq \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \leq \tilde{c}_2 \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots \leq \tilde{p}_2 \leq \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\tilde{\phi} = \phi - \delta e_2^T B^{-1} \underline{b}$ =-84 -6δ $\qquad \ldots\ldots\ldots \qquad -\ldots. \leq \tilde{\phi} \leq -\ldots.$

▲

2^ el.to x_B (B^{-1} b)

Cosa succede se δ= - 4 per p_2?

$\tilde{\underline{r}}_n^T = [-7+2\delta, -1/4 - 81/4)\delta] = [1, -5/4]$

$\tilde{\phi}$ = - 84 +24 = -60

1	0	-1	0	1/4	0	4
0	1	$\boxed{2}$	0	-1/4	0	6
0	0	-30	1	5/2	0	20
0	0	1	0	-5/4	1	-60

entra in base s_1 ed esce x_2 e si avrebbe il tableau

1	1/2	0	0	1/8	0	7
0	1/2	**1**	0	-1/8	0	3
0	15	0	1	5/4	0	110
0	-1/2	0	0	-9/8	1	-63

cambia la soluzione.

Cosa può accadere con l'aggiunta di una nuova variabile decisionale x_3?

$$[A \ a_{n+1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \leq \underline{b} \quad \text{e} \quad \varphi = [\underline{c}^T, c_{n+1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \gamma$$

Il tableau finale è perturbato, contiene una colonna in più

$B^{-1} \underline{a}_3$

$\underline{c}_B^T B^{-1} \underline{a}_3 - c_3$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	φ	b
	1	1	**2**	**1**	0	**0**	0	10
T_i =	10	20	**1**	**0**	1	**0**	0	180
	8	4	**2**	**0**	0	**1**	0	56
	9	8	$-c_3$	**0**	0	**0**	1	0

$$\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/4 \\ 2 & 0 & -1/4 \\ -30 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 7/2 \\ -55 \end{bmatrix}$$ la nuova variabile è n.b.

per quale intervallo di costo unitario è conveniente aggiungere la variabile $\mathbf{x_3}$?

$$r_3 = \underline{c}_B^T B^{-1} a_3 - \underline{c}_3 = [-7, 0, -1/4] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - c_3 = -14 - 1/2 - c_3 = -29/2 - c_3 \geq 0$$

così $\mathbf{x_3}$ entra in base

ESEMPIO 3

$\max \omega = -3x_1 + 4x_2$

s.a $\quad -2x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1 - 3x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

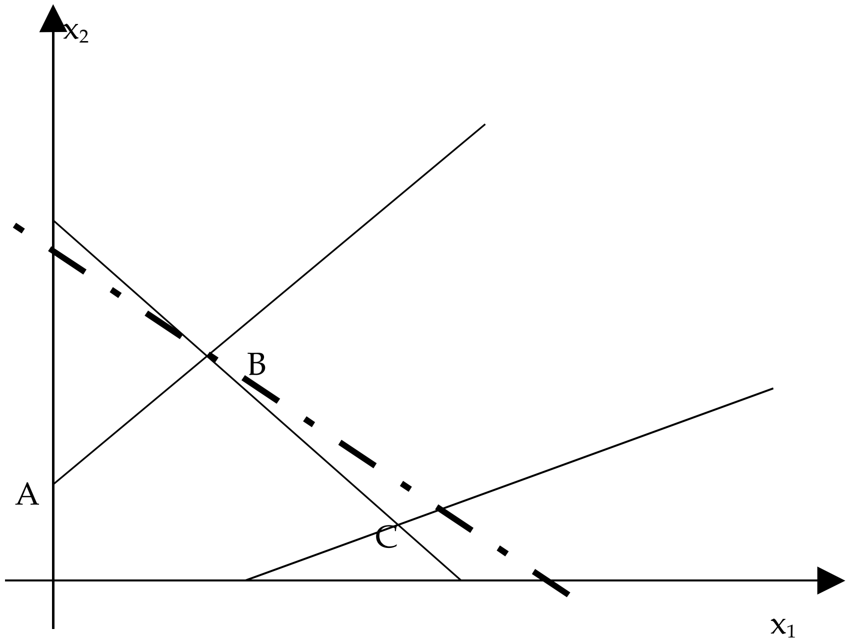
$\min \varphi = 3x_1 - 4x_2$

s.a $\quad -2x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1 - 3x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$



$\min \varphi = 3x_1 - 4x$

s.a $\quad -2x_1 + x_2 + s_1 = 2$

$x_1 + x_2 + s_2 = 8$

$x_1 - 3x_2 + s_3 = 4$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Tableau iniziale

$T_i =$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	b
-2	1	1	0	0	0	2
1	1	0	1	0	0	8
1	-3	0	0	1	0	4
-3	4	0	0	0	1	0

v.b. (s_1, s_2, s_3), v.n.b. (x_1, x_2), sol ammissibile di base iniziale (0,0, 2, 8, 4)

e dopo lo sviluppo dell'algoritmo del simplesso arrivati al valore ottimo della f.o.
il tableau finale risulta

$$T_f = \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & b \\ \hline 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4/3 & 5/3 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -7/3 & -5/3 & 0 & 1 & -18 \end{array}$$

v.b. (x_2, x_1, s_3), v.n.b. (s_1, s_2), sol. ammissibile di base ottima (2, 6, 0, 0,20).

La base ottima nel T_i è [x_2, x_1,s_3], giacchè nel T_f sono v.b x_2, x_1, s_3, quindi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e l'inversa della base che si legge nel T_f in corrispondenza delle v.scarto è

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ 4/3 & 5/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad \underline{c}_B = \begin{bmatrix} c_2 = -4 \\ c_1 = 3 \\ c_5 = 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \underline{c}_B^T B^{-1} = [-7/3, -5/3, 0]$$

Di quanto può variare il termine noto di un vincolo senza che vari la composizione della base ? e tra quali valori varierebbe la f.o.?

Con la variazione di b variano i termini del tableau:

3) $\mathbf{B^{-1}\underline{b}}$ (determinazione delle v.b.) che diventa $B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \tilde{x}_B = x_B + B^{-1}\underline{e}_i\delta$
4) $\underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma$ (valore della f.o.) che diventa $\tilde{\phi} = \phi + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_i\delta$

Variazione del termine noto del 1° vincolo

$$\tilde{x}_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}\delta = \begin{bmatrix} 6 + 1/3\delta \\ 2 - 1/3\delta \\ 20 + 4/3\delta \end{bmatrix}$$ per l'ammissibilità dovrà essere $-15 \le \delta \le 6$

$B^{-1}\underline{e}_1$ nel tableau finale è la colonna che corrisponde alla v.scarto s_1

$\ldots\ldots \le \underline{\tilde{b}}_1 \le \ldots\ldots..$

$$\tilde{\phi} = \phi + \underline{c}_B B^{-1}\underline{e}_1\delta = -18 + [-7/3, -5/3\ 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\delta = -18 - 7/3\delta$$

per $\delta = -15$ $\tilde{\phi} =$ -18 +35 = 17

per $\delta = 6$ $\tilde{\phi} =$ -18 – 14 = -32 $\qquad -32 \le \tilde{\phi} \le 17$

Variazione del termine noto del 2° vincolo

$$\tilde{x}_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} \delta = \begin{bmatrix} 6 + 2/3\delta \\ 2 + 1/3\delta \\ 20 + 5/3\delta \end{bmatrix}$$ per l'ammissibilità dovrà essere $\delta \ge -6$

$B^{-1}\underline{e}_2$ nel tableau finale è la colonna che corrisponde alla v.scarto s_2

$\tilde{\underline{b}}_2 \le$ ……..

la base ottimale resta invariata è costituita sempre dalle stesse colonne, anche se δ cambia x_B l'ottimo si sposta

$$\tilde{\phi} = \phi + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{e}_2 \delta = -18 + [-7/3, -5/3\ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta = -18 - (5/3)\delta$$

per $\delta = -6$ $\qquad \tilde{\phi} \le -8$

Variazione del termine noto del 3° vincolo

$$\tilde{x}_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta \rightarrow \left| \begin{array}{l} 6 > 0 \\ 2 > 0 \\ 20 + \delta \ge 0 \end{array} \right. \rightarrow \delta \ge -20$$

$B^{-1}\underline{e}_3$ nel tableau finale è la colonna che corrisponde alla v.scarto s_3

$\tilde{\underline{b}}_3 \ge$ ……..

$$\tilde{\phi} = \phi + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{e}_3 \delta = -18 + [-7/3, -5/3.\ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta = -18 - 0\delta \text{ resta invariata}$$

(Se la var. scarto di un vincolo- s_3- è di base, allora tale vincolo –3° vincolo-non è attivo la frontiera si sposta, ma ciò è ininfluente, giacchè la frontiera non individua l'ottimo).

Di quanto può variare un coefficiente di costo della f.o. senza perdere l'ottimo?

Variando il coefficiente di costo p_1 della seconda v.b. nel tableau finale x_1:

$\tilde{p}_1 = -3 + \delta$

$\tilde{c}_1 = 3 - \delta$ $\qquad$ e $\qquad \tilde{\underline{r}}_n^T = [-7/3, -5/3] - \delta[-1/3, 1/3]$

▲

dalla 2^ riga del t.f.

$\tilde{\underline{r}}_n^T = [-7/3 - (1/3)\delta, -5/3 - (1/3)\delta]$

$-7/3 - (1/3)\delta \le 0$

$-5/3 - (1/3)\delta \le 0$ $\qquad$ - ….$\le \delta \le$ …. $\qquad$ ……$\le \tilde{c}_1 \le$……

$\widetilde{\phi} = \phi - \delta e_2^T B^{-1} \underline{b}$ = -18 - 2δ … ….. -≤ $\widetilde{\phi}$ ≤ -……

▲

1^ el.to x_B (=B^{-1} b)

Variando il coefficiente di costo c_2 della prima v.b. nel tableau finale x_2:

$\widetilde{p}_2 = 4 + \delta$

$\widetilde{c}_2 = -4 - \delta$ e $\underline{\widetilde{r}}_n^T$ = [-7/3, –5/3] - δ[1/3, 2/3]

▲

dalla 1^ riga del t.f.

$\underline{\widetilde{r}}_n^T$ = [-7/3 - (1/3)δ, -5/3-(2/3)δ]

-7/3 - (1/3)δ, ≤ 0

-5/3-(2/3)δ ≤ 0 δ ≥ 5/2 ……≤ $\widetilde{c}_2$ ≤…….

$\widetilde{\phi} = \phi - \delta e_1^T B^{-1} \underline{b}$ =-18 - 6δ…….. $\widetilde{\phi}$ ≤ -------

▲

2^ el.to x_B (B^{-1} b)