Esercizio: controllore a minima varianza

Testo

Si consideri il sistema:

$$y(t) = \frac{2 + 0.5z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1}} u(t-2) + \frac{2 + 0.5z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} e(t)$$

ove $e(t) \sim WN(0,1)$ e $u(t)$ è una variabile di controllo esogena.

Si progetti, se possibile, il controllore a minima varianza, e se ne tracci lo schema a blocchi.

Soluzione

La difficoltà di questo esercizio, sta nel fatto che il denominatore della funzione di trasferimento dell'ingresso esogeno è diversa dal denominatore della funzione di trasferimento del ingresso remoto.

Forma canonica:

$$2\frac{1 + 0.25z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} e(t) = \frac{1 + 0.25z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \eta(t) \text{ con } \eta(t) \sim WN(0,4)$$

Moltiplichiamo sopra e sotto per $1 - 0.25z^{-1}$. Questo evidentemente non modica in alcun modo nè il modulo del filtro, nè la fase, perché aggiungo un polo e uno zero coincidenti.

$$\frac{1 + 0.25z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \frac{1 - 0.25z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1}} \eta(t)$$

Spezzo la funzione di trasferimento in due parti:

$$\frac{1 + 0.25z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1}} \frac{1 - 0.25z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \eta(t)$$

Ora ragioniamo sul rumore bianco e sulla sua funzione di trasferimento. La funzione di trasferimento $\frac{1-0.25z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$ è asintoticamente stabile (l'unico polo sta in 0.5): c'è un teorema che dice che l'uscita di regime di un filtro asintoticamente stabile, alimentata da un p.s.s., è un p.s.s.

Possiamo quindi sostituire a $\frac{1-0.25z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \eta(t)$, un rumore bianco di varianza opportuna (la media non cambia perché l'uscita di un filtro asintoticamente stabile alimentato da un p.s.s. a media nulla, è ancora un p.s.s. a media nulla).

Calcoliamo quindi la varianza del rumore in questo modo:

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \frac{1-0.25z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\eta(t) \\
v(t) &= 0.5v(t-1)+\eta(t)-0.25\eta(t-1) \\
Var[v(t)] &= \gamma_v(0) = E[(0.5v(t-1)+\eta(t)-0.25\eta(t-1))^2] \\
\gamma_v(0) &= E[0.25v(t-1)^2+\eta(t)^2+0.0625\eta(t-1)^2-0.25v(t-1)\eta(t-1)] \\
\gamma_v(0) &= 0.25\gamma_v(0)+4+0.25-0.25E[v(t-1)\eta(t-1)] \\
\gamma_v(0) &= 0.25\gamma_v(0)+4.25-0.25E[(0.5v(t-2)+\eta(t-1)-0.25\eta(t-2))\eta(t-1)] \\
\gamma_v(0) &= 0.25\gamma_v(0)+4.25-0.25E[\eta(t-1)^2] \\
\gamma_v(0) &= 0.25\gamma_v(0)+4.25-1 \\
\gamma_v(0) &= 0.25\gamma_v(0)+3.25 \\
\gamma_v(0) &= \frac{13}{3}
\end{aligned}
$$

Riscriviamo ora l'intero sistema:

$$
y(t) = \frac{2+0.5z^{-1}}{1-0.25z^{-1}}u(t-2)+\frac{1+0.25z^{-1}}{1-0.25z^{-1}}v(t) \text{ con } v(t) \sim WN\left(0, \frac{13}{3}\right)
$$

Ora è possibile applicare il metodo standard per la determinazione del controllore a minima varianza.